plates or tables, in the uſe of them, than they did in their figure. Nor can I apprehend, the former were deſigned for any other purpoſe, than that above mentioned. But as they are very remarkable, and perhaps the ſingular remains of that kind, relating to the Roman government, either here in Britain, or any other part of their dominions; they may deſerve the further conſideration of the curious, in their inquiries into theſe ſubjects.

CIX. *Two Eſſays addreſſed to the Rev.* James Bradley, *D. D. and Aſtrom. Reg. by Mr.* Charles Walmeſley, *F. R. S.*

Reverend Sir,

Read Nov. 4, 1756.

I HAVE taken the liberty to addreſs to you two little eſſays, that relate to aſtronomy; for as no one is more maſter of that ſcience, or has enriched it with greater diſcoveries, than yourſelf, you can beſt judge of the worth and uſe of any performance in that kind. The firſt eſſay is a Theory on the Preceſſion of the Equinoxes, and the Nutation of the Earth's Axis; which, as it is indebted to you for the diſcovery of the cauſe, on which it is founded, as alſo for the ſettling of the effects, with which its reſult is to be compared, ought to be laid before you as a homage, that of right is due. You expreſſed a deſire of a theory on that ſubject: I have therefore examined, according to the *principle of gravity*, what motions may be produced in the globe

The Royal Society is collaborating with JSTOR to digitize, preserve, and extend access to *Philosophical Transactions (1683-1775).* www.jstor.org

globe of the earth by the actions of the ſun and moon, and have endeavoured to determine their preciſe quantity and laws of variation. You obſerved yourſelf, that the ſuppoſition you made uſe of, of the earth's pole moving round the periphery of a circle, whoſe center repreſented the mean place of the pole, was not exact: and in effect, as theory ſhews there are two equations ariſing from the ſun's action, and as many from the action of the moon, to be uſed in ſettling the true place of the pole, the ſimple motion in the circle cannot anſwer accurately to the compoſition of theſe ſeveral motions; and it is from thence proceeded that ſurprizing difference you found betwixt the polar diſtances calculated on that ſuppoſition, and thoſe obſerved, in the ſtar α *Caſſiopea*, in the year 1738, and in η *urſæ majoris* in the year 1740 and 1741; which diſtances, if computed from the theory, as here laid down, agree with the obſervations as nearly as the others. This appears in the tables that are added of theſe computations. You alſo inſinuated it would be proper to examine, whether the poſition of the moon's apogee had not a ſhare of influence in theſe apparent motions of the ſtars. I therefore conſidered that point, but found, as you will ſee in the fifth propoſition, that the diminution of the moon's action in the higher part of its orbit is ſo compenſated by the increaſe of the ſame action in the lower part, that in the whole revolution of the moon no alteration ariſes, whatever be the ſituation of the nodes.

The ſecond eſſay is a Theory of the Irregularities, that may be occaſioned in the annual Motion of the Earth by the Actions of Jupiter and Saturn. I was

led into this reſearch by reflecting upon that queſtion, debated among the aſtronomers for ſo many ages paſt, whether the mean inclination of the two planes of the ecliptic and equator ſuffers any change or remains invariable. Conſidering then what cauſe could produce a change in this inclination, I eaſily conceived, that if the action of Jupiter had ſufficient power to alter the plane of the earth's orbit, with reſpect to its own, by making their common interſection recede, in the ſame manner as the ſun's action operates on the lunar orbit, an alteration in the obliquity of the ecliptic would neceſſarily follow; and upon cloſer examination it appeared, that Jupiter really cauſed the earth to deviate in its courſe, and gave a retrograde motion to the line of interſection of their orbits; and further, that according to the preſent ſituation of that line, its regreſs was ſuch, as to have occaſioned a gradual diminution in the obliquity of the ecliptic for many ages paſt: by which means that queſtion ſeems decided. The reaſon, why the aſtronomers have not hitherto been able to ſettle that point, is, becauſe this variation proceeds at ſo ſlow a rate, that the obſervations of the ancients are not ſufficiently exact to aſcertain the ſmall diminution, that has happened ſince their time. I have endeavoured to fix the laws, quantity and period of this variation. From the ſame cauſe are alſo computed a progreſſive motion occaſioned in the earth's aphely, and a ſmall regreſſive one in the equinoctial points: in all which is added the little ſhare of influence, that belongs to Saturn. In the laſt propoſition are deduced ſome inequalities, that occur in certain elements of the earth's theory, that have hitherto been

ſuppoſed

ſuppoſed invariable. Theſe, as they are very ſmall, I have only added in that view, that you, who know the beſt what degree of preciſion may be expected from aſtronomical obſervations, may judge whether they are worth notice or not.

I muſt obſerve, that ſome of the points of theſe two treatiſes have been conſidered by others; and if my concluſions any where differ from them, I leave it to other geometricians to decide which are right. All I ſhall ſay on that head is, that my reſult agrees with the computation of the great Sir Iſaac Newton. As to the method, I have rather choſen to deduce the propoſitions by geometrical reaſoning, after the manner of Sir Iſaac Newton; which in reſearches of this kind always appeared to me much more ſimple, more rational, and more elegant, than the long calculus of an intricate analyſis. Beſides, if in the application there ſlips any error, it is more eaſily diſcovered in the firſt method.

As a lover of the ſciences, I ſhould be glad to contribute to their improvement; but, whether what is here offered may be reputed a ſtep that way, is left intirely to your determination. I am, with the greateſt reſpect,

Reverend Sir,

Rome, Dec. 3. 1756.

Your moſt obedient

humble ſervant,

Charles Walmeſley.

De Præceſſione Æquinoctiorum et axis Terræ Nutatione.

Lemma I.

INvenire vim, quâ Sol agit in partes Æquatorias Terræ.

Eſto *T* (Fig. 1.) centrum Terræ, *B* polus, *AT* recta jungens centra terræ et ſolis, *ASQ* circulus centro *T* deſcriptus et perpendicularis Æquatori quem exhibit linea *TS*, et *TQ* linea interſectionis circuli *TASQ* et plani plano Eclipticæ perpendicularis: per punctum Æquatoris *S* ducatur *SM* parallela rectæ *AT* occurrens *TQ* in *M*, et producatur ad *P* ut ſit $SP = 3\,SM$, et ex *P* agatur *PN* perpendicularis in planum Æquatoris *TS*. Tum ob ſimilitudinem triangulorum *STM*, *SPN*, erit *ST*. *MT* :: *SP* ſive 3*SM*. $PN = \frac{3\,SM \times MT}{ST}$. Sed notum eſt, quod, ſi radius terræ *ST* exhibeat vim, quâ ſol deprimit particulam *S* verſus centrum *T*, 3*SM* exhibebit vim, quâ eamdem particulam retrahit à plano, quod eſt plano Eclipticæ perpendiculare, adeòque $\frac{3\,SM \times MT}{ST}$ exhibebit vim *PN*, quâ perturbatur ſitus plani Æquatoris, et efficacia hujus vis ad convertendum Æquatorem eſt ut $PN \times ST$, id eſt, ut ipſa vis *PN*. Vis autem *ST* eſt ad vim, quâ Terra retinetur in orbe ſuo circa ſolem, ut ſemidiameter terræ *ST* ad diſtantiam terræ a ſole, et vis, quâ terra retinetur in orbe ſuo eſt, ad vim centrifugam in terræ æquatore in ratione compoſitâ ex ratione directâ diſtantiæ terræ à ſole ad ſemidiametrum terræ et ratione inverſâ duplicata

Eſsay I.

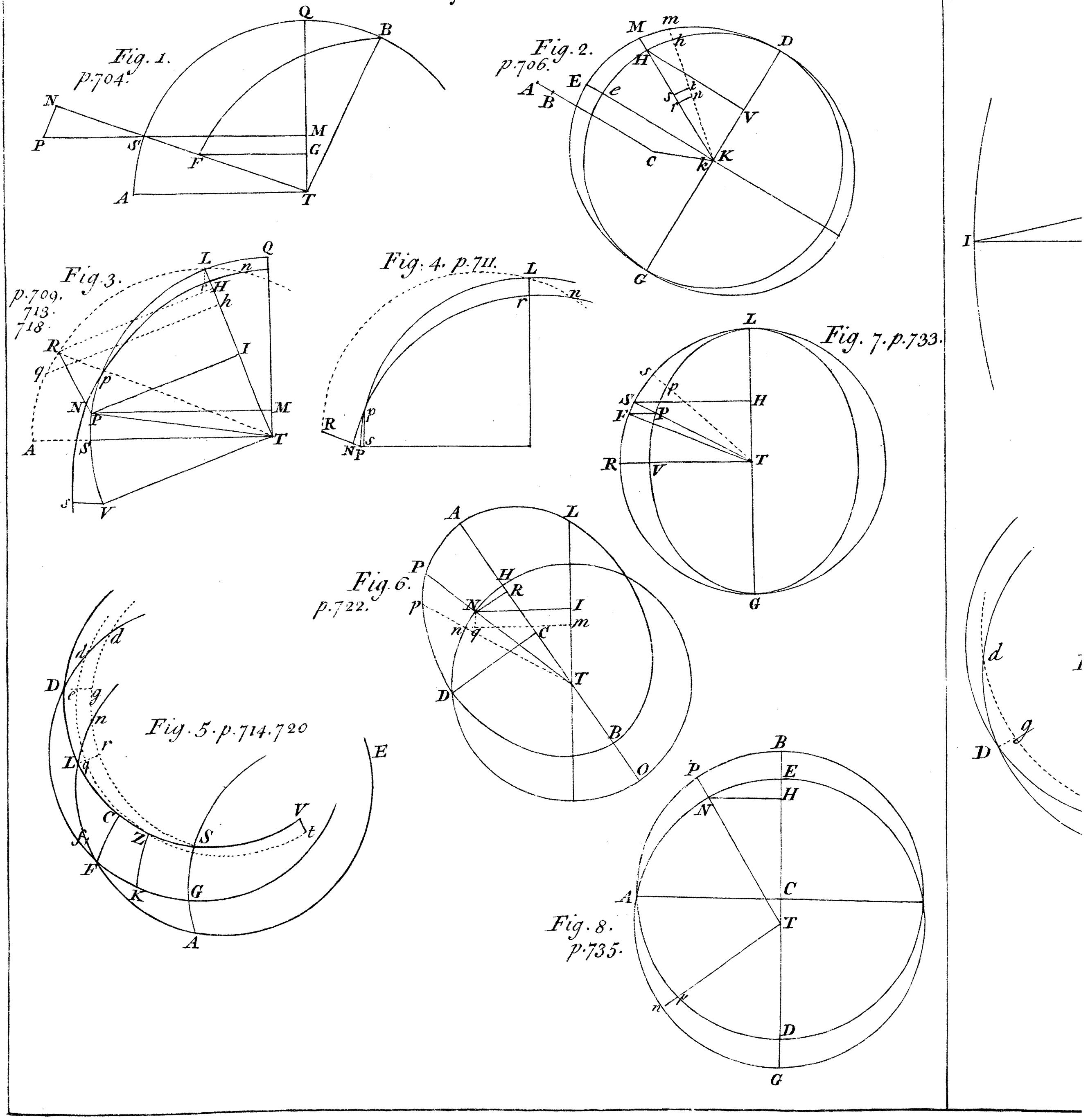


Fig. 1. p.704.
Fig. 2. p.706.
Fig. 3. p.709. 713. 718.
Fig. 4. p.711.
Fig. 5. p.714.720
Fig. 6. p.722.
Fig. 7. p.733.
Fig. 8. p.735.

Eſsay II.

Fig. 1. p. 737.

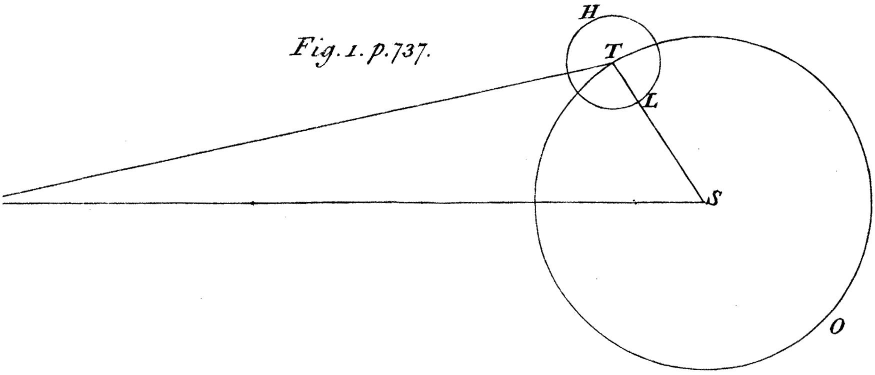


Fig. 2. p. 742.

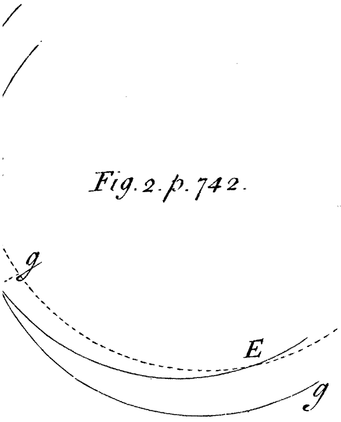
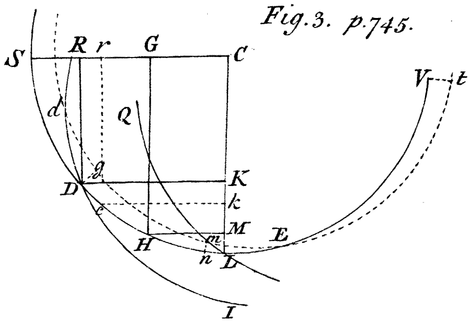


Fig. 3. p. 745.



J. Mynde ſc.

plicatâ temporis periodici terræ circa ſolem ad ejuſdem tempus periodicum circa axem ſuum: unde per compoſitionem rationum, ſcribendo S pro periodo terræ annuâ et T pro periodo diurna, prodit vis PN ad vim centrifugam in terræ Æquatore ut $\frac{3SM \times MT}{\overline{ST}^2} \times \frac{TT}{SS}$ ad 1. Patet autem vis PN conatum hunc eſſe, ut convertat æquatorem circum axem plano $TASQB$ perpendicularem, id eſt, circum axem qui jacet in communi ſectione æquatoris et plani QT Eclipticæ perpendicularis.

Ad æquales à puncto S in circumferentiâ æquatoris diſtantias ſumantur puncta duo F, et quia horum utriuſque vis conatur æquatorem convertere circum axem plano TFB reſpectivé perpendicularem, conatus ex utraque vi compoſitus concurret cum vi prædictâ PN ad convertendum æquatorem eique inhærentem terram circum axem plano $TASQ$ perpendicularem. Ducantur autem rectæ FG perpendiculares in planum QT eclipticæ perpendiculare, et ſumma virium, quibus iſtæ duæ particulæ fugiunt planum æquatoris, erit $\frac{6FG \times TG}{FT}$, ut patet ex dictis, cujus pars, quæ conſpirat cum prædictâ vi PN, cùm ſit ad $\frac{6FG \times TG}{FT}$ ut FT ad ST, erit $\frac{6FG \times TG}{ST}$ (reliquis harum virium partibus utpoté oppoſitis ſe mutuò deſtruentibus) ſive ob ſimilitudinem triangulorum FGT et SMT, hæc ſumma erit ad vim PN ut $2\,\overline{FT}^2$ ad $\overline{ST}^2$; proindeque, cum ſumma omnium $\overline{FT}^2$ per totam circumferentiam ſit ſubdupla ſummæ totidem $\overline{ST}^2$, erit ſumma actionum omnium

nium per circuitum æquatoris ſubdupla ſummæ totidem actionum in particulam *S* : quamobrem vis ea, quâ perturbatur ſitus circuli æquatoris, ex viribus punctorum omnium circumferentiam æquatoris conſtituentium collecta, eſt ad vim centrifugam in eodem æquatore, ponendo radium terræ $ST=1$, ut $\frac{3SM \times MT}{2} \times \frac{TT}{SS}$ ad 1. *Q. E. I.*

LEMMA II.

Vis particularum omnium extra terræ globum interiorem, cujus ſcilicet diameter eſt terræ axis minor, undique ſitarum ad terram circum axem prædictum rotandam eſt ad vim particularum totidem in circuitu circuli æquatoris uniformiter in morem annuli diſpoſitarum ad terram circa eumdem axem movendam ut 2 ad 5. Luculenter demonſtratur apud *Newtonum.*

LEMMA III.

Rationem motûs terræ totius ad motum materiæ ſupra globum terræ interiorem ſtratæ determinare.

Exhibeat *C* centrum terræ, (Fig. 2.) *CK* portionem diametri cujuſvis æquatoris, *EDGK* ſectionem terræ diametro *CK* et plano æquatoris perpendicularem; ſectio hæc et ſectiones omnes huic parallelæ ellipſes ſunt ut notum eſt, et ſibi ſimiles. Ex centro *K* ellipſeos *EDG* ducatur in plano æquatoris radius *KE*, eritque ellipſeos ſemiaxis major, et radius huic perpendicularis *KD* ſemiaxis minor; ducantur item radii alii duo *KM*, *Km* ſibi proximi, et centro *K* et radio *KD* deſcribatur circulus *DHe* ſecans *Km*, *KM*, *KE*, in *h*, *H*, *e*; et radio quolibet

Kr

Kr deſcribatur arcus *rn* ſecans *KM*, *Km*, in *r*, *n*, et arcus *st* arcui *rn* proximus ſecans *KM*, *Km*, in *s*, *t*. Jam quoniam areola *rstn*, dum terra revolvitur circa axem *CK*, fertur velocitate diſtantiæ *Kr* proportionali, motus ejus proportionalis erit $Kr \times rs \times st$ ſive $\frac{\overline{Kr}^2 \times Hh \times rs}{KH}$; unde motus areæ totius *KMm* proportionalis erit $\frac{\overline{KM}^3 \times Hh}{3KH}$. Agatur *HV* perpendicularis in *KD*, et ſi ſemiaxis major *KE* parùm excedere ſupponatur ſemiaxem minorem *KD*, erit $HM = \frac{\overline{HV}^2 \times Ee}{\overline{KH}^2}$ quam proximè, adeoque $\frac{\overline{KM}^3 \times Hh}{3KH} = \frac{\overline{KH}^2 \times Hh}{3} + \frac{\overline{HV}^2 \times Hh \times Ee}{KH}$, ac proinde ſumma motuum arearum omnium *KMm*, id eſt, motus totius ſectionis erit proportionalis circumferentiæ *DHD* ductæ in $\frac{\overline{KH}^2}{3} + \frac{KH \times Ee}{2}$. Sit autem *CA* æqualis ſemidiametro terræ majori, *CB* ſemidiametro minori, et *AB* ſemidiametrorum differentiæ; ſit *Kk* particula quàm minima axis *CK*, et *C* denotet circumferentiam æquatoris; tùm, quia eſt $KH . KE :: CB . CA$, et $Ee . AB :: KE . CA$, erit motus portionis ſphæroidicæ, cujus craſſities eſt *Kk*, duabus ſectionibus parallelis terminatæ, hoc eſt, circumferentia *DHD* ducta in $Kk \times \overline{\frac{\overline{KH}^2}{3} + \frac{KH \times Ee}{2}}$ proportionalis quantitati $\frac{C \times \overline{CB}^3 \times \overline{KE}^3 \times Kk}{3\overline{CA}^4} + \frac{C \times \overline{CB}^2 \times \overline{KE}^3 \times AB \times Kk}{2\overline{CA}^4}$, adeòque ſumma horum motuum ſive motus to-

5 tius

tius ſphæroidis circum axem CK exponetur per $\frac{CC\times\overline{CB}^3}{16CA}+\frac{3CC\times\overline{CB}^2\times AB}{32CA}$ vel, ſi D deſignet circumferentiam radio CB deſcriptam, per $\frac{DD\times CA\times CB}{16}+\frac{3DD\times CA\times AB}{32}$. Hincque motus globi interioris, cujus radius eſt CB, exponetur per $\frac{DD\times\overline{CB}^2}{16}$: adeòque eſt motus globi interioris ad motum terræ totius circum axem CK gyrantis ut $\overline{CB}^2$ ad $CA\times CB+\frac{CA\times 3AB}{2}$ ſive ut $CA-2AB$ ad $CA+\frac{AB}{2}$ quamproximé, et motus materiæ globo terræ interiori incumbentis ad motum terræ totius ut $5AB$ ad $2CA$ quamproximé. *Q. E. I.*

Coroll.

Eadem ratiocinandi methodo, ſi circumferentia circuli radio CB deſcripti revolatur circa diametrum propriam, cum motus cujuſvis puncti circumferentiæ ſit ut ipſius diſtantia ab hac diametro, motus totius circumferentiæ exponetur per $4\,\overline{CB}^2$: unde, ſi loco circumferentiæ ſubſtituatur annulus tenuiſſimus, erit motus annuli ad motum globi cujus ſemidiameter eſt CB, ut $4\overline{CB}^2$ ad $\frac{DD\times\overline{CB}^2}{16}$; hoc eſt, in ratione compoſita, ex ratione materiæ in annulo ad materiam in globo, et ratione duorum quadratorum ex diametro ad tria quadrata ex arcu quadrantali circuli, quemadmodum demonſtravit *Newtonus*. Atque hoc pacto ſi ſemidiameter terræ minor ſit ad majorem ut 229 ad 230, et tota materia ſupra globum terræ interiorem

interiorem diffuſa coaleſcere intelligatur, uti ſupponit *Newtonus*, in annulum uniformem, qui æquatorem cingat, erit motus annuli ad motum globi interioris ut 4590 ad 485223, et motus annuli ad motum terræ totius ut 4590 ad 489813.

Hîc autem advertere liceat proportionem hanc motuum, quæ nempe derivatur ex hypotheſi, quod tota materia globo terræ interiore ſuperior in annulum circum æquatorem coaleſcat, à verâ paululum aberrare: patet enim ſingulas materiæ particulas in locis ſuis conſiſtentes non ipſum eundem concipere motum ex terræ rotatione, quem ſortirentur, ſi juxta hypotheſim illam in æquatore ſimul collectæ ſubſiſterent. Differentiam illam motuum, quia minuta eſt, in inveſtigatione præceſſionis mediæ æquinoctiorum, ut minùs conſideratione dignam, omiſit *Newtonus*. At quoniam nunc temporis, ob nova Aſtronomiæ inventa, accuratius inquiritur proportio virium Solis et Lunæ, earumdemque effectus proprii, differentiæ iſtius habere rationem operæ pretium videtur, atque ea propter lemma hoc ſubjunximus et in propoſitione ſequenti uſurpabimus.

Propositio I. Problema.

Inveſtigare Præceſſionem mediam Æquinoctiorum vi ſolis genitam. Deſignet SPQ (Fig. 3.) Æquatorem terræ, ARL Eclipticam, TL lineam interſectionis planorum æquatoris et eclipticæ PM perpendiculum demiſſum ex puncto æquatoris P in planum QT quod ſupponitur eclipticæ perpendiculare. Sumpto arcu quam minimo æquatoris Pp, ſit PN duplum ſpatii, quod corpus percurrere poſſet perpendiculariter ad æquatorem, impellente vi in lemmate 1°. definitâ, quo tempore punctum p cum æquatore revol-

vens deſcribit arcum pP, atque hoc pacto poſt illam particulam temporis planum æquatoris tranſlatum reperietur in ſitum $TNpn$, ac jam eclipticam ſecabit in n, eritque arcus Ln receſſus interſectionis æquatoris et eclipticæ ſive præceſſio æquinoctiorum. In Npn demittatur perpendiculum Lr, et in TL perpendiculum PI, et cum lineæ PN, Lr, ſint ut ſinus arcuum Pp, PL, erit $Pp . PN :: PI . Lr$, et ſcribendo B pro ſinu et C pro coſinu inclinationis eclipticæ ad æquatorem ad radium 1, in triangulo rectangulo Lrn habetur $B . 1 :: Lr . Ln$, adeoque fit $Pp \times B . PN :: PI . Ln$, et $Ln = \frac{PN \times PI}{B \times Pp}$: dato igitur arcu Pp, eſt Ln ut $PN \times PI$. Centro T deſcribatur arcus circuli RP perpendicularis in æquatorem LP, eritque in triangulo ſphærico LRP tangens anguli RLP. inclinationis ſcilicet eclipticæ ad æquatorem, ad tangentem arcûs RP, id eſt, erit $\frac{B}{C}$ ad $\frac{MT}{PM}$, ut radius I. ad PI ſinum arcûs PL, unde erit $PI = \frac{C \times MT}{B \times PM}$. Item in eodem triangulo eſt B ad 1 ut MT ad RH ſinum arcûs eclipticæ RL, hoc eſt, $MT = B \times RH$. Inſuper eſt PN ut $PM \times MT$ ex lem: 1°; quarè eſt $PN \times PI$ adeòque et Ln ut $\overline{RH}^2$, hoc eſt præceſſio horaria æquinoctiorum vi ſolis genita eſt in duplicatâ ratione ſinûs diſtantiæ ſolis ab Æquinoctio. Et quoniam ſumma omnium $\overline{RH}^2$, quo tempore ſol periodum ſuam abſolvit, eſt dimidium ſummæ totidem $\overline{TR}^2$, ideò præceſſio annua æquinoctiorum eſt ſubdupla ejus, quam ſol in quadraturis Æquinoctiorum, hoc eſt, in ſolſtitiis ſemper manens eodem tempore generare poſſet.

Sit

Sit igitur ſol in Coluro Solſtitiali, eruntque *LP* et *LR* (Fig. 4.) quadrantes circuli, et *Lr* menſura anguli *Lpn* ſive *PpN*; hincque in triangulo *Lrn* eſt *Ln* ſive præceſſio horaria æquinoctiorum in hoc caſu ad *Lr* ſive ad angulum *Ppn* ut 1 ad *B*: eſt autem angulus *PpN*, ducto perpendiculo *ps* in radium *TP*, ad duplum angulum *Pps*, id eſt, ad angulum *PTp* qui eſt motus horarius terræ circa axem ſuum ut vis quæ agit ſecundum *PN* ad vim centrifugam in æquatore, hoc eſt, per lemma 1, ut $\frac{3SM \times MT}{2} + \frac{TT}{SS}$ Fig. 1. ad 1; ſive quia eſt in hoc caſu $MT = B$, et $SM = C$; ut $\frac{3B \times C}{2} \times \frac{TT}{SS}$ ad 1; eſtque motus horarius terræ circa axem ſuum ad motum horarium ſolis ut *S* ad *T*: unde conjunctis rationibus eſt præceſſio horaria Æquinoctiorum ad motum horarium ſolis ut $\frac{3C}{2} \times \frac{T}{S}$ ad 1, et in eadem ratione eſt præceſſio annua ad motum ſolis annuum.

Præceſſio igitur annua Æquinoctiorum, in hypotheſio quod ſol toto eo tempore ſtaret immotus in ſolſtitio, foret $\frac{3C}{2} \times \frac{T}{S} \times 360^o$, et vera præceſſio annua foret hujus ſubdupla. Sed quia Sol agit non tantum in circulum æquatoris, ut in hac propoſitione hucuſque ſuppoſuimus, ſed in totam materiam ſupra globum terræ interiorem ſparſam, et globus ipſe motum hac vi genitum participare debet, ideò minuenda eſt præceſſio in ratione compoſitâ, ex ratione 2 ad 5 per lemma 2, et ex ratione 5 *AB* ad 2 *CA* per lemma 3; quarè præceſſio annua Æquinoctiorum à vi ſolis oriunda tandem prodit $\frac{3C}{4} \times \frac{T}{S} \times \frac{2}{5} \times \frac{5AB}{2CA} \times 360^o$

$\times 360^{\circ} = \frac{3C}{4} \times \frac{T}{S} \times \frac{AB}{CA} \times 360^{\circ}$.

Sit igitur diameter terræ major ad minorem ut 230 ad 229, eritque $\frac{AB}{CA} = \frac{1}{230}$, et, exiſtente inclinatione Eclipticæ ad Æquatorem 23°. 28′. 30″. præceſſio æquinoctiorum annua vi ſolis prodit 10″,583. Sit ratio 178 ad 177 illa terræ diametrorum, qualem ex recentioribus quidam derivarunt obſervationibus, eritque $\frac{AB}{CA} = \frac{1}{178}$, et præceſſio æquinoctiorum annua 13″,675.

Si motûs communicatio inter globum terræ interiorem et materiam exteriorem fiat ſecundum hypotheſim *Newtonianam*, quemadmodum expoſitum eſt in Coroll. lem 3, et diameter terræ major fuerit ad minorem ut 230 ad 229, annua æquinoctiorum præceſſio ex vi ſolis erit $\frac{3C}{4} \times \frac{T}{S} \times \frac{2 \times 4590}{5 \times 489813} \times 360 = 9'',124 = 9''.\ 7'''.\ 26^{iv}$. Et ſi inclinatio Eclipticæ ad æquatorem ſupponatur eſſe $23^{\circ}\frac{1}{2}$, præceſſio illa evadit $9''.\ 7'''.\ 20^{iv}$, uti invenit *Newtonus*. *Q. E. I.*

Coroll. I.

Ponatur cum *Ill. Bradleio* Præceſſio annua Æquinoctiorum mediocris tota æqualis 50″,3; atque ex eâ auferantur 10″,583 et remanebunt 39″,717 pro præceſſione annuâ mediocri â vi lunæ oriundâ, eritque vis lunæ ad vim ſolis ut 3,753 ad 1, in hypotheſi, quod ratio diametrorum terræ ſit $\frac{230}{229}$; ſi verò hæc ratio ſtatuatur æqualis $\frac{178}{177}$: terrâ manente uniformiter denſâ, ex 50″,3 auferantur 13″675, eritque

præceſſio

præceſſio annua vi lunæ genita $36'',625$, et vis lunæ ad vim ſolis ut 2,678 ad 1.

Coroll. II.

Sumatur jam in Eclipticâ arcus Rq (Fig. 3.) quem ſol dato tempore quam minimo, v. g. horæ ſpatio, deſcribit, et ductâ qh parallelâ rectæ RH, quia eſt ex dictis in propoſitione præceſſio Æquinoctiorum horaria, exiſtente ſole in loco quovis R, ad præceſſionem mediocrem horariam ut $\overline{RH}^2$ ad $\frac{\overline{TR}^2}{2}$ ſive, cum ſit $RH. TR :: Hh. Rq$, ut $RH \times Hh$ ad $\frac{TR \times Rq}{2}$, erit præceſſio vera ad præceſſionem mediam, quo tempore ſol deſcribit arcum LR, ut ſpatium LRH ad ſectorem LTR, et differentia earum ad præceſſionem mediam ut triangulum TRH ad ſectorem LTR: ideòque, exiſtente $LR = 45°$, id eſt, in Octantibus Æquinoctiorum cum ſole hæc differentia ſive æquatio, quæ tunc maxima evadit (ſcribendo D pro circumferentiâ circuli cujus radius eſt 1) eſt æqualis $\frac{10'',583}{2D}$ vel $\frac{13'',675}{2D}$, unde emergit Theorema ſequens: *Eſt motus ſolis ad motum Æquinoctiorum vi ſolis genitum, ut radius ad ſinum duplæ æquationis æquinoctiorum maximæ.* Hoc pacto in priori caſu prodit æquatio maxima $51'''$, in poſteriori $1''. 5'''$. In aliis locis hæc æquatio eſt ad æquationem maximam ut ſinus duplæ diſtantiæ ſolis ab Æquinoctio vel Solſtitio proximo ad radium, ut patet: et additur motui medio ubi ſol tranſit à Solſtitiis ad Æquinoctia, et ſubducitur ubi ſol pergit ab Æquinoctiis ad Solſtitia.

Coroll.

COROLL. III.

Ex propoſitione generatim ſequitur regreſſum horarium mediocrem lineæ interſectionis planorum Æquatoris Terreſtris et Orbitæ planetæ cujuſcumque circa terram revolventis eſſe ut vis illius planetæ in globum terraqueum, cæteris manentibus, et coſinus inclinationis ejus orbitæ ad terræ æquatorem, conjunctim.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

Invenire inæqualitatem Præceſſionis Æquinoctiorum, quæ pendet à vario ſitu Nodorum Lunæ.

Sunto *SLD* (Fig. 5.) Æquator, *EAFL* Ecliptica ſecans Æquatorem in *L*, *E* Æquinoctium vernum, *L* autumnale, *GFD* orbis lunæ ſecans æquatorem in *D* et eclipticam in *F*, *AGS* circulus maximus perpendicularis in Æquatorem, et ſunto *SD*, *GD* quadrantes circuli. Dum Nodus *F* deſcribit arcum horarium eclipticæ *Ff*, vi lunæ transferatur interſectio *D* per arcum *Dd*, et deſcribatur circulus *Sd* exhibens ſitum æquatoris poſt horam elapſam, ſecetque Eclipticam in *n*, et ducantur in æquatorem perpendicula *Dg*, *Lr*. Eſto *b* ſinus ad radium 1 et *c* coſinus inclinationis, eo tempore, orbis lunaris ad terræ æquatorem; exiſtente, ut prius, *B* ſinu et *C* coſinu inclinationis Eclipticæ ſive inclinationis mediocris orbitæ lunaris ad Æquatorem: Eritque (per Coroll. 3. prop. præced.) regreſſus horarius mediocris interſectionis planorum Æquatoris et Eclipticæ vi lunæ genitus ad *Dd*, regreſſum ſcilicet mediocrem horarium interſectionis planorum Æquatoris et orbitæ

bitæ lunaris, ut C ad c; eſt autem Ff ad regreſſum prædictum interſectionis planorum Æquatoris et Eclipticæ ut motus medius nodorum lunarium ad motum medium Æquinoctiorum vi lunæ genitum, quam rationem pono eſſe K ad 1; eſt ergo $Ff.\ Dd :: C \times K.\ c$; ſed eſt $Dd.\ Dg :: 1.\ b$, et $Dg.\ Lr :: 1$ ad ſinum arcûs LS quem voco k, eſtque $Lr.\ Ln :: B.\ 1$; under per compoſitionem rationum fit $Ff.\ Ln :: B \times C \times K.\ b \times c \times k$.

Per nodum F deſcribatur arcus circuli maximi FC perpendicularis in SL, et ex principiis Trigonometriæ Sphæricæ eſt Coſ. FL ad radium 1 ut Cotang. FLC ad Tang. LFC; deinde eſt Sin. LFC ad Sin. DFC ut Coſ. FLC ad Coſ. FDC: cum autem angulus DFC ſit ſumma angulorum DFL et LFC, eſt Sin. $DFC =$ Sin. $DFL \times$ Coſ. $LFC +$ Coſ. $DFL \times$ Sin. LFC. Quo pacto, ſcriptis p pro ſinu et q pro coſinu anguli DFL, inclinationis nimirum mediocris orbitæ lunaris ad Eclipticam, et v pro ſinu et u pro coſinu arcûs EF, diſtantiæ ſcilicet nodi ab Æquinoctio verno, habebitur Coſ. $FDL = c = Cq + Bpu$. Item in triangulo FDL eſt $b : p :: v :$ Sin. DL, adeòque eſt coſinus arcûs DL ſive ſinus arcûs LS, hoc eſt, $k = \frac{1}{b}\sqrt{b^2 - p^2v^2} = \frac{1}{b} \times \overline{Bq - Cpu}$.

Hinc ergo obtinetur $b \times c \times k = \overline{Cq + Bpu} \times \overline{Bq - Cpu} = BCq^2 - \overline{C^2 - B^2} \times pqu - BCp^2u^2$, ſed ſcribi poteſt 1 pro q et rejici terminus BCp^2u^2 ob exiguitatem p ſinûs ſcilicet anguli $5^\circ.\ 8'\frac{1}{2}$. Quaré eſt Ln ad Ff ut $BC - \overline{C^2 - B^2} \times pu$ ad $B \times C \times K$, et ſumma motuum Ln ad ſummam motuum Ff, quo tempore nodus F deſcribit arcum EF, ut ſumma quan-

titatum

titatum $BC - \overline{C^2 - B^2} \times pu$ ad ſummam totidem $B \times C \times K$, hoc eſt, ut $B \times C \times EF + \overline{C^2 - B^2} \times pv$ ad $B \times C \times K \times EF$, atque adeò quo tempore nodus tranſit ab Æquinoctio ad Solſtitium præceſſio æquinoctiorum fit $\frac{90^\circ}{K} + \frac{\overline{C^2 - B^2} \times p \times 90^\circ}{B \times C \times K \times EA}$, et quo tempore tranſit nodus ab uno Æquinoctio ad alterum, præceſſio fit $\frac{180^\circ}{K}$. Ex priori motu auferatur poſterioris dimidium et remanebit $\frac{\overline{C^2 - B^2} \times p \times 90^\circ}{B \times C \times K \times EA}$ pro differentiâ inter præceſſionem veram et mediam, id eſt, pro æquatione maximâ præceſſionis ubi nodi lunares ſcilicet verſantur in punctis ſolſtitialibus: in aliis locis patet hanc æquationem eſſe ad æquationem maximam ut ſinus diſtantiæ nodi ab Æquinoctio ad radium, et additur præceſſioni mediæ in regreſſu nodi aſcendentis ab Æquinoctio Verno ad Autumnale, et ſubducitur in ejuſdem regreſſu ab autumnali ad Æquinoctium Vernum. Notandum autem eſſe $C^2 - B^2 = 2C^2 - 1 =$ Coſ. $2 \times 23^\circ.\ 28'\frac{1}{2}$, et $B \times C = \frac{1}{2}$ Sin. $2 \times 23^\circ.\ 28'\frac{1}{2}$, ideòque $\frac{C^2 - B^2}{B \times C} = 2 \times \frac{\text{Coſ.}}{\text{Sin.}}\ 2 \times 23^\circ.\ 28'\frac{1}{2} = \frac{2}{\text{Tang. } 2 \times 23^\circ.\ 28'\frac{1}{2}}$. Quamobrem evadit $\frac{\overline{C^2 - B^2} \times p \times 90^\circ}{BC \times K \times EA} = \frac{90^\circ \times 2 \times \text{Sin. } 5^\circ.\ 8'\frac{1}{2}}{K \times EA \times \text{Tang. } 2 \times 23^\circ.\ 28'\frac{1}{2}}$, atque hinc emergit Theorema ſequens: *Eſt tangens duplicatæ inclinationis Æquatoris ad Eclipticam ad ſinum duplicatæ inclinationis orbis lunaris ad Eclipticam ut radius ad ſinum quemdam:* tumque, *eſt motus medius nodorum ad motum medium æquinoctiorum vi lunæ genitum ut ſinus mox inventus ad ſinum æquationis Æquinoctiorum maximæ.* Loco ſinûs dupli inclinationis orbis

orbis lunaris ad Elipticam in Theoremate uſurpo propter analogiam ſinum duplicatæ ejuſdem inclinationis, cum error inde exſurgens ſit contemnendus, ut quiſque experiri facilé poteſt. Eſt autem motus nodorum lunæ annuus $19^\circ.\,20'\frac{1}{2}$, et motus Æquinoctiorum annuus vi lunæ genitus $39'',717$ ex Coroll. 1. prop. 1, exiſtente ratione diametrorum terræ æquali $\frac{230}{229}$, proindeque eſt $K=1753$. Idem Æquinoctiorum motus, exiſtente $\frac{178}{177}$ ratione diametrorum terræ, eſt $36'',625$, atque adeò $K=1901$. Unde in priori caſu prodit æquatio Æquinoctiorum maxima $19'.\,38'''$; in poſteriori $18''.\,16'''$. *Q. E. I.*

COROLL.

Ex hac propoſitione Præceſſio Æquinoctiorum vi lunæ genita pro tempore dato proportionalis eſt quantitati $b\times c\times k$ ſive $BC-\overline{C^2-B^2}\times pu$; maxima ergo eſt ubi nodus lunæ aſcendens verſatur in principio Arietis, tunc enim eſt $u=-1$; minima autem, ubi idem nodus tranſit in ſignum libræ, ob $u=1$ eo in caſu. Unde, quoniam præceſſio annua vi lunæ genita eſt æqualis $\frac{39'',717}{B\times C}\times\overline{B\times C-\overline{C^2-B^2}\times pu}$, vel $\frac{36'',625}{B\times C}$ $\times\overline{B\times C-\overline{C^2-B^2}\times pu}$, nullâ habitâ ratione mutationis ſitûs nodorum per id temporis factæ, differentia inter præceſſionem annuam mediocrem et maximam erit $\frac{39'',717\times\overline{C^2-B^2}\times p}{B\times C}=\frac{39'',717\times 2\times \text{Sin. } 5^\circ.\,8'\frac{1}{2}}{\text{Tang. } 2\times 23^\circ.\,28'\frac{1}{2}}$, vel $\frac{36'',625\times 2\,\text{Sin. } 5^\circ.\,8'\frac{1}{2}}{\text{Tang. } 2\times 23^\circ.\,28'\frac{1}{2}}$.

Igitur, *Eſt tangens duplicatæ inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem ad ſinum duplicatæ inclinationis Orbis*

lunaris ad Eclipticam ut præceſſio annua Æquinoctiorum mediocris vi lunæ genita ad differentiam inter præceſſionem mediocrem et maximam ſeu minimam. Unde in priori caſu eſt hæc differentia æqualis $6''.37'''$, in poſteriori $6''.6'''$, proindeque ſi tota præceſſio annua ſtatuatur $50''.20'''$, eo anno, in cujus medio circiter nodus lunæ aſcendens occupat primum gradum Arietis, præceſſio æquinoctiorum erit $56''.57'''$, vel $56''.26'''$: ubi autem nodus ſubit ſignum Libræ, præceſſio illius anni erit $43''.43'''$, vel $44''.14'''$. Et quia differentia prædicta in aliis temporibus eſt ut ſinus diſtantiæ nodi a punctis Solſtitialibus, facilé habebitur pro anno quolibet, dato nodorum ſitu.

Propositio III. Problema.

Invenire Variationem Inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem quam generat vis Solis.

Manentibus iis quæ in propoſitione primâ dicta ſunt, producatur arcus LS (Fig. 3.) ad V ut LV ſit quadrans circuli, et dimittatur Vs perpendicularis in arcum pN productum, eritque Vs menſura Variationis horariæ inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem. Eſt autem $Vs.\ Lr::TI.\ PI$, et $Lr.\ Ln::B.\ 1$, atque per propoſitionem primam præceſſio æquinoctiorum horaria Ln eſt ad præceſſionem horariam ubi ſol verſatur in Solſtitiis quam voco U, ut $\overline{RH}^2$ ad $\overline{TR}^2$; quare conjunctis rationibus eſt $Vs.\ U::$ $\frac{B\times TI\times\overline{RH}^2}{PI}.\ \overline{TR}^2$, ſive, ob $TR=1$, $PI=\frac{C\times RH}{PM}$, $TI=\frac{TH}{PM}$, eſt $Vs.U::\frac{C}{B}\times RH\times TH.\ 1$; et ſumma variationem omnium horariarum Vs quo tempore

ſol

ſol deſcribit arcum LR eſt ad ſummam totidem angulorum U ut ſumma omnium factorum $RH \times TH$ ducta in $\frac{B}{C}$ ad ſummam totidem quadratorum 1, id eſt, ut $\frac{\overline{RH}^2}{2} \times \frac{B}{C}$ ad arcum LR, et Variatio tota quâ minuitur inclinatio Æquatoris ad Eclipticam in progreſſu ſolis ab Æquinoctio ad Solſtitium eſt ad ſummam angulorum U (quæ tunc evadit æqualis ſemiſſi præceſſionis annuæ vi ſolis genitæ, hoc eſt, æqualis $\frac{10'',583}{2}$ vel $\frac{13'',675}{2}$) ut $\frac{B}{2C}$ ad arcum LV, ac proinde Variatio tota fit $\frac{B \times 10'',583}{C \times 4 LV} = \frac{10'',583 \times \text{Tang.} 23^\circ.28'\frac{1}{2}}{4 LV}$, vel $\frac{13'',675 \times \text{Tang.} 23^\circ.28'\frac{1}{2}}{4 LV}$, unde naſcitur hoc Theorema: *Motus ſolis eſt ad motum æquinoctiorum vi ſolis genitum ut tangens Inclinationis mediocris Eclipticæ ad Æquatorem ad tangentem Variationis totius ejuſdem Inclinationis.* Atque hinc Variatio tota elicitur in priori caſu æqualis $44'''$, in poſteriori $57'''$, ſole ſcilicet in Solſtitiis exiſtente: in aliis locis variatio eſt, ut patet, in duplicatâ ratione ſinûs diſtantiæ ſolis ab Æquinoctio ad radium, ac propterea differentia inter ſemiſſem variationis totius et variationem genitam quo tempore ſol deſcribit arcum quemlibet LR eſt ad ſemiſſem variationis totius, ſeu ad $22'''$ vel $28'''\frac{1}{2}$, ut $2\overline{RH}^2 - 1$ ad 1, hoc eſt, ut coſinus duplæ diſtantiæ ſolis ab Æquinoctio ad radium; adeoque, dato ſolis loco, datur hæc differentia ſive æquatio, quæ addenda eſt Inclinationi mediæ Eclipticæ, ubi diſtantia ſolis ab Æquinoctio alterutro minor eſt 45 gradibus; et ubi major eſt hæc diſtantia, ſub-

ducitur. Maxima igitur eſt Inclinatio Eclipticæ ad Æquatorem, ſole verſante in Æquinoctiis; minima, ſole occupante Solſtitia. *Q. E. I.*

PROPOSITIO IV. PROBLEMA.

Variationem Inclinationis Eclipticæ, quæ pendet à vario ſitu Nodorum lunæ, determinare.

Iiſdem poſitis quæ in propoſitione ſecundâ tradita ſunt, jam ſit luna in K (Fig. 5.) et deſcribatur arcus circuli maximi KZ perpendicularis in Æquatorem DZS, et per punctum Z arcus Zd exhibens ſitum æquatoris poſt horæ ſpatium: ſecet autem Zd orbem lunæ in d, et lineas Dg, Lr, in e et q; atque ex puncto V æquatoris, exiſtente LV quadrante circuli, demittatur in arcum dZ productum perpendicularis Vt. Deſignet P motum mediocrem horarium æquinoctiorum vi lunæ genitum, atque per propoſitionem ſecundam eſt $P . Dd :: C . c$; et exiſtente DS quadrante circuli, ex demonſtratis in propoſitione primâ ſequitur eſſe $2\,Dd : Dd :: 1 : \overline{\text{Sin}.\,DK}^2$; habetur autem $Dd : De :: 1 : b$; tum $De : Lq :: \text{Sin}.\,DZ : \text{Sin}.\,LZ$, et $Lq . Vt :: \text{Sin}.\,LZ : \text{Coſ}.\,LZ$; unde per compoſitionem harum omnium rationum fit $2\,P : Vt :: C \times \text{Sin}.\,DZ : b \times c \times \overline{\text{Sin}.\,DK}^2 \times \text{Coſ}.\,LZ$. Eſt autem $\text{Coſ}.\,LZ = \text{Sin}.\,DL \times \text{Sin}.\,DZ + \text{Coſ}.\,DL \times \text{Coſ}.\,DZ$, hincque $2\,P . Vt :: C : b \times c \times \overline{\text{Sin}.\,DK}^2 \times \text{Sin}.\,DL + \text{Coſ}.\,DL \times \frac{\text{Coſ}.\,DZ}{\text{Sin}.\,DZ}$: ſed in triangulo ſphærico DKZ habetur $c : 1 :: \text{Cotang}.\,DK$ ſive $\frac{\text{Coſ}.\,DK}{\text{Sin}.\,DK} : \text{Cotang}.\,DZ$ ſive $\frac{\text{Coſ}.\,DZ}{\text{Sin}.\,DZ}$; unde tandem prodit $2\,P$ ad Vt ut C ad $b \times c \times \text{Sin}.\,DL \times \overline{\text{Sin}.\,DK}^2 + bc\,\text{Coſ}.\,DL \times \text{Sin}.\,DK \times \text{Coſ}.\,DK$. Summa igitur omnium Vt, hoc eſt, ſumma varia-

tionum

tionum omnium horariarum, Inclinationis Eclipticæ tempore revolutionis lunæ genita, manente ſitu nodorum, eſt ad ſummam totidem motuum P ut ſumma omnium quantitatum $2\, b \times c \times \text{Sin.}\ DL \times \overline{\text{Sin.}\ DK}^2 + 2\, b \times \text{Coſ.}\ DL \times \text{Sin.}\ DK \times \text{Coſ.}\ DK$ in circulo ad ſumma totidem coſinuum C, id eſt, ut $b \times c \times \text{Sin.}\ DL$ ad C. Poſito itaque, ut prius, motu medio nodorum ad motum medium æquinoctiorum vi lunæ genitum ut K ad 1, erit variatio mediocris horaria inclinationis Eclipticæ in menſe dato ad motum horarium mediocrem nodorum Ff, ut $b \times c \times \text{Sin.}\ DL$ ad $C \times K$, id eſt, ob $\text{Sin.}\ DL = \frac{pv}{b}$ et $c = Cq + Bpu$, ut $Cpqv + Bp^2vu$ ad $C \times K$ ſive ut pv ad K quam proximé, adeòque ſumma omnium variationum inclinationis Eclipticæ quo tempore nodus lunæ deſcribit arcum EF eſt ad motum nodi EF ut ſumma omnium pv ad ſummam totidem K, hoc eſt, ut $p \times \overline{1+u}$ ad $K \times EF$, et variatio tota quâ mutatur inclinatio Eclipticæ in regreſſu nodi ab uno Æquinoctio ad alterum, eſt ad motum nodorum 180° ut $2p$ ad $K \times EL$, quæ proinde æquatur $\frac{2p \times 180^\circ}{K \times EL}$, atque adeò per Theorema ſequens facilé prodibit: *Motus Nodorum eſt ad motum Æquinoctiorum vi lunæ genitum ut ſinus inclinationis Orbitæ lunaris Æclipticam ad ſinum ſemiſſis Variationis totius Inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem.*

Si ratio diametrorum terræ ſit $\frac{230}{229}$, eſt motus nodorum lunæ ad motum æquinoctiorum ex prop. ut 1753 ad 1, et ut 1901 ad 1 ſi ratio terræ diametrorum ſit $\frac{178}{177}$. In priori caſu per Theorema prodit

Variatio

Variatio tota Inclinationis Eclipticæ 21″. 5‴; in caſu poſteriori 19″. 27‴: generatur autem tempore quo tranſeunt Nodi Lunares ab uno Æquinoctio ad alterum. In locis inter Æquinoctia variatio erit ad variationem totam, ex mox demonſtratis, ut $1+u$ ad 2, hoc eſt, ut ſinus verſus diſtantiæ nodi ab Æquinoctio Verno ad diametrum; vel, differentia inter ſemiſſem variationis totius et variationem pro tempore dato eſt ad ſemiſſem variationis totius, nempe ad 10″. 32‴½ vel 9″. 43‴½, ut coſinus diſtantiæ nodi ab Æquinoctio Verno ad radium: additur autem hæc differentia ſive æquatio Inclinationi mediæ Eclipticæ in regreſſu nodi à Solſtitio Æſtivali ad Solſtitium Hybernale, ac in alterâ medietate revolutionis nodi ſubducitur, ut habeatur Inclinatio Eclipticæ vera. Et maxima eſt Eclipticæ Obliquitas ubi nodus lunæ aſcendens Æquinoctium vernum ſive ingreſſum Arietis tenuerit; minima verò, cum idem nodus ad Autumnale Æquinoctium ſive ad ſignum Libræ retrorſum pervenerit. *Q. E. I.*

Propositio V. Problema.

Inæqualitates Præceſſionis Æquinoctiorum et Variationis Obliquitatis Eclipticæ, quæ pendere poſſunt ex ſitu Apogæi Lunæ, inveſtigare.

Deſcribat luna in plano Eclipticæ ellipſim *APBL* (Fig. 6.) cujus centrum ſit *C*, *T* focus quem Terra occupat, *AB* axis major, *CD* ſemiaxis minor, *TL* communis ſectio planorum Æquatoris et Eclipticæ. Eſto Luna in *P*, et ducantur *TP*, *Tp* quæ abſcindant ſectorem *TPp* motu lunæ horario deſcriptum. Centro *T* et radio ſemiaxi majori *CA* æquali deſcribatur circulus *HNO* ſecans *TP* et *Tp* in *N* et *n*, atque in *TL* demittantur perpendicula *NI*, *nm*, et in

in *TA* perpendiculum *NR*. Si luna in circulo *HNO* revolvi ſupponeretur, ubi ad locum *N* pertingerit, præceſſio horaria æquinoctiorum vi lunæ genita foret, per demonſtrata in propoſitione primâ, ut $\overline{NI}^2$; at præceſſio illa creſcit in ratione vis quâ gignitur, et hæc vis eſt in ratione triplicatâ inversâ diſtantiæ lunæ *TP*, adeòque præceſſio horaria eſt ut $\frac{\overline{NI}^2}{TP^3}$ ſive ut eadem quantitas $\frac{\overline{NI}^2}{TP^3}$ ducta in ſectorem conſtantem TPp, hoc eſt, ut $\frac{\overline{NI}^2 \times Nn}{TP}$ ſive ut $\frac{NI \times Im}{TP}$; ſed ex naturâ ellipſeos habetur $\frac{1}{TP} = \frac{\overline{CA}^2 + TC \times TR}{CA \times \overline{CD}^2}$: unde tota præceſſio genitâ quo tempore luna in orbe ſuo revolvitur eſt ut ſumma quantitatum $NI \times Im \times \frac{\overline{CA}^2 + TC \times TR}{CA \times \overline{CD}^2}$ in circulo, ſive (quia rejici poteſt terminus ambiguus $+ \frac{TC \times TR}{CA \times \overline{CD}^2}$, utpote per alteram dimidiam circumferentia circuli partem poſitivus, per alteram dimidiam negativus) ut ſumma omnium in circulo factorum $NI \times Im$, hoc eſt, ut area ipſa circuli *HNOH*; ac proinde Præceſſio Æquinoctiorum in ſingulis lunæ revolutionibus manet eadem in quolibet Apogæi ſitu.

Variatio horaria inclinationis Eclipticæ, ſi luna exiſteret in *N* revolvendo in circulo *HNO*, foret ex demonſtratis in prop. 3. ut $NI \times TI$: ſi verò transferatur luna in *P*, eadem variatio erit ut $\frac{NI \times TI}{TP^3}$ vel

ut $\frac{NI \times TI}{TP^3} \times TPp$, hoc eſt, ut $\frac{NI \times TI \times Nn}{TP}$ ſive, ductâ nq parallelâ TI, ut $\frac{NI \times nq}{TP}$; proindeque, ob rationem mox datam, variatio Inclinationis Eclipticæ tempore revolutionis lunæ genita eſt ut ſumma omnium in circulo factorum $NI \times nq$, id eſt, nulla.

Hinc licité colligi videtur nullam ex ſitu Apogæi Lunæ ſive in motu Æquinoctiorum ſive in Obliquitate Eclipticæ induci variationem. *Q. E. I.*

Scholium I.

Ex præcedentibus liquet Terræ Polis geminos motus competere ab utriſque ſeorſim Solis et Lunæ, quatenus extra Æquatorem revolventium, viribus oriundos; alterum plano Eclipticæ parallelum, quo puncta Æquinoctialia in antecedentia continuò retrahuntur, ac propterea ſtellæ promoveri videntur in conſequentia. Motus alter eſt ad planum Eclipticæ perpendicularis, quo Terræ Poli nutant et oſcillantur accedendo ad polos Eclipticæ et ab eis recedendo per vices, atque inde mutatur Declinatio ſtellarum. Horum motuum quantitatem directé deduximus ab exceſſu altitudinis terræ ad Æquatorem ſupra altitudinem ejus ad polos, ſecundum duplicem hypotheſim, quâ nempe exceſſus ille æſtimatur pars $\frac{1}{230}$ vel $\frac{1}{178}$ altitudinis totius, quæ hactenus eſt à Mathematicis potiſſimum uſurpata. Si verò nota præſupponatur Nutatio terræ axis, quæ quatenus actioni lunæ debita ſtatuatur æqualis 18″, et inde quærantur motus reliqui, per propoſitiones ſupra traditas ii prodeunt, præceſſio ſcilicet æquinoctiorum annua mediocris

cris vi ſolis genita 16″. 24‴, vi lunæ 33″. 54‴, æquatio præceſſionis maxima vi ſolis 1″. 23‴, vi lunæ 16″. 45‴: Nutatio axis vi ſolis 1″. 10‴, manente nimirum terrâ uniformiter denſâ.

Ut autem innoteſceret quænam ex tribus recenſitis hypotheſibus cum Phænomenis Cœleſtibus maximé conveniret, tabulas pro ſingulis confeceram et inde ſupputaveram variationes declinationis ſtellarum illarum ſex, quas exhibet *Bradleius* in Epiſtolâ ſuâ de Nutatione axis terræ in *Tranſ. Phil.* unde compertum et errores variationum computatarum intra arctiores limites contineri in hypotheſi illâ, quâ Nutatio ſtatuitur 19″. 27″ exiſtente $\frac{178}{177}$ ratione terræ diametrorum. Quapropter tabulas hujus hypotheſis proprias viſum eſt hîc tradere, per Coroll. 2. prop. 1. et prop. 2. 3. et 4. ad partem primam decimalem minuti ſecundi conſtructas.

Æquatio Æquinoctiorum Solaris.				
☉ ab ♈	Sig. O / Sig. VI.	I / VII	II / VII	Subt. / Subt.
°	″	″	″	
0	0.0	0.9	0.9	30
5	0.2	1.0	0.8	25
10	0.4	1.1	0.7	20
15	0.5	1.1	0.5	15
20	0.7	1.1	0.4	10
25	0.8	1.0	0.2	5
30	0.9	0.9	0.0	0
adde	Sig. V	IV	III	☉
adde	Sig. XI.	X	IX	ab ♈

Æquatio Æquinoctiorum Lunaris.				
☽ ☊ ab ♈	Sig. O / Sig. VI	I / VII	II / VIII	Subt. / adde
°	″	″	″	
0	0 0	9.1	15.7	30
5	1.6	10.4	16.4	25
10	3.1	11.6	17.0	20
15	4.7	12.8	17.5	15
20	6.2	13.9	17.8	10
25	7.7	14.8	18.0	5
30	9.1	15.7	18.1	0
Subt.	Sig. V	IV	III	☽ ☊
adde	Sig. XI	X	IX	ab ♈

Æquatio Obliq. Æclipticæ Solaris.				
⊙ ab ♈	Sig. O ad. / Sig. VI ad.	I ad. / VII. ad	II ſub. / VIII ſub.	
°	″	″	″	
0	0.5	0.3	0.3	30
5	0.5	0.2	0.3	25
10	0.4	0.1 adde	0.4	20
15	0.4	0.0	0.4	15
20	0.4	Subt. 0.1	0.4	10
25	0.3	0.2	0.5	5
30	0.3	0.3	0.5	0
	Sig. V. ad / Sig. XI. ad	IV ſub. / X ſub.	III ſub. / IX ſub.	⊙ ab ♈

Æquat. Obliq. Eclipticæ Lunar.				
☽ ☊ ab ♈	Sig. O / Sig. VI	I / VII	II / VIII	adde / Subt.
°	″	″	″	
0	9.7	8.4	4.9	30
5	9.7	8.0	4.1	25
10	9.6	7.4	3.3	20
15	9.4	6.9	2.5	15
20	9.1	6.2	1.7	10
25	8.8	5.6	0.8	5
30	8.4	4.9	0.0	0
Subt. / adde	Sig. V / Sig. XI	IV. / X	III / IX	☽ ☊ ab ♈

Jam ut pateat qualis ſit Theoriæ cum Phænomenis conſenſus, ſubjiciemus computationes variationum ſtellarum ſex prædictarum ex tabulis præcedentibus derivatas. Quam obtinent formam hujuſmodi tabulæ apud *Bradleium*, eamdem hic retinent, et quidem columnæ, prima ſecunda et quarta eædem ſunt; Prima nempe indicat tempora Obſervationum, Secunda diſtantias ſtellarum à puncto in Sectore determinato menſuratas, Quarta Aberrationem lucis; Tertia autem hîc exhibet variationem declinationis cujuſque ſtellæ ortam ex præceſſione æquinoctiorum ſecundum priores duas tabulas ſuprà traditas æquatâ; Quinta exhibet variationem declinationis ortam ex Nutatione terræ axis ſive ex Æquatione Obliquitatis Eclipticæ e duabus tabulis poſterioribus excerptâ et adhibitâ ſecundum ſtellæ aſcenſionem rectam; Sexta tandem exhibet diſtantiam ſtellæ mediam ad diem 27um Martii an. 1727 à puncto ſectoris in columnâ ſecundâ notato: hæc autem diſtantia colligitur ex numeris in columnis 2a, 3a, 4a et 5a ſcriptis et ſecundum

cundum ſua ſigna ritè conjunctis: unde, ſi tum Obſervationes, tum æquationes motuum, eſſent omnes ad amuſſim accuratæ, omnes cujuſque ſtellæ diſtantiæ in hac columnâ expreſſæ forent ubique æquales.

γ Draconis.	Diſt. Auſt. a' 38°. 25	Var. Decl. ex Præceſ.	Aberratio Lucis	Var. Decl. ex Nutat.	Diſtantia media
	″	″	″	″	″
1727 Septemb. 3	70.5	—0.4	+19.2	—10.1	79.2
1728 Martii - 18	108.7	0.9	—19.0	8.5	79.3
Septemb. 6	70.2	1.4	+19.3	9.1	79.0
1729 Martii - 6	108.3	1.8	—19.3	9.2	79.0
Septemb. 8	69.4	2.3	+19.3	7.1	79.3
1730 Septemb. 8	68.0	3.2	19.3	4.3	79.8
1731 Septemb. 8	66.0	4.1	19.3	—1.1	80.1
1732 Septemb. 6	64.3	4.9	19.3	+2.0	80.7
1733 Auguſti 29	60.8	5.7	19.0	5.1	79.2
1734 Auguſti 11	62.3	6.4	16.9	7.5	80.3
1735 Septemb. 10	60.0	7.2	19.3	8.8	80.9
1736 Septemb. 9	59.3	7.9	19.3	9.2	79.9
1737 Septemb. 6	60.8	8.7	19.3	8.5	79.9
1738 Septemb. 13	62.0	9.4	19.3	6.7	78.6
1739 Septemb. 2	66.5	10.2	19.2	4.4	80.0
1740 Septemb. 5	70.8	11.0	19.6	+1.2	80.3
1741 Septemb. 2	75.4	11.8	19.2	—2.0	80.8
1742 Septemb. 5	76.7	12.6	19.3	5.2	78.2
1743 Septemb. 2	81.6	13.5	19.1	7.6	79.6
1745 Septemb. 3	86.3	15.3	19.2	10.1	80.1
1746 Septemb. 17	85.5	16.4	19.2	9.8	79.5
1747 Septemb. 2	86.1	17.2	19.2	8.4	79.7

 35°. Came-

35ª Camelopardali Hevelii	Diſt. Auſt. a' 38° 25'	Var. Decl. ex Præceſ.	Aberratio Lucis	Var. Decl. ex Nutat.	Diſtantia media
	"	"	"	"	"
1727 Octob. - 20	73.6	+0.9	−6.7	+9.7	77.5
1728 Januar. - 12	60.8	1.3	+6.1	9.2	77.4
Martii - 1	57.8	1.6	+9.4	9.6	78.4
Septemb. 26	75.2	2.5	−8.8	8.9	77.8
1729 Februar. 26	56.4	3.2	+9.4	8.2	77.2
1730 Martii - 3	57.8	4.8	9.4	5.8	77.8
1731 Februar. - 5	59.1	6.1	8.5	+2.8	76.5
1733 Januar. - 31	64.1	9.2	8.2	−3.6	77.9
1733 Decemb. 30	61.8	16.8	4.3	6.9	76.0
1739 Februar. 4	56.9	16.9	8.5	6.0	76.3
1740 Januar. - 20	56.0	18.1	7.0	−3.6	77.5
1747 Februar. 27	32.3	28.7	9.4	+9.2	79.6

α Caſſiopeæ	Diſt. Auſt. a' 34°. 55'	Var. Decl. ex Præceſ.	Aberratio Lucis	Var. Decl. ex Nutat.	Diſtantia media
	"	"	"	"	"
1727 Septemb. 9	55.0	+10.2	+2.2	+1.1	68.5
1728 Septemb. 17	30.8	32.8	+4.6	1.0	69.2
1729 Junii - - 8	A 35.7	48.7	−16.3	0.7	68.8
Decemb. 3	B 9.4	59.1	+16.5	0.6	66.8
1730 Junii - 11	A 13.8	70.3	−15.2	0.4	68.3
Decemb. 9	B 30.8	80.7	+16.3	+0.3	66.5
1732 Januar. - 8	49.2	102.9	12.9	−0.1	66.5
1733 Januar. 21	64.8	123.1	+10.0	0.4	67.9
1734 Junii - - 13	62.8	148.5	−16.1	0.9	68.7
Decemb. 11	105.4	157.4	+16.2	1.0	67.2
1738 Decemb. 23	176.3	229.3	+15.2	0.8	67.1
1740 Junii - - 2	169.1	255.1	−16.5	−0.3	69.9
1747 Februar. 27	332.3	400.3	+00.2	+1.0	69.1

τ Perſei	Diſt. Auſt. a' 38°. 20'	Var. Decl. ex Præceſ.	Aberratio Lucis	Var. Decl. ex Nutat.	Diſtantia media
	"	"	"	"	"
1727 Septemb. 16	60.1	+8.2	−3.2	+6.3	71.4
Decemb. 29	39.7	13.5	+12.9	5.6	71.7
1728 Decemb. 21	22.5	30.4	12.8	4.8	70.5
1729 Decemb. 2	A 9.2	46.3	11.5	3.5	70.5
1731 Januar. - 3	B 8.2	64.6	12.8	+1.6	70.8
1732 Januar. - 8	22.0	80.7	12.7	−0.4	71.0
1733 Januar. 21	34.6	96.5	11.7	2.4	71.2
1738 Decemb. 23	117.0	179.4	12.8	4.4	70.8
1740 Januar. - 22	132.5	195.3	11.7	2.3	72.2

α Perſei

α Perſei	Diſt. Auſt. a 41°. 5′	Var. Decl. ex Præceſ.	Aberratio Lucis	Var. Decl. ex Nutat.	Diſtantia media
	″	″	″	″	″
1727 Decemb. 29	79.4	+12.0	+11.4	+6.5	109.3
1728 Aprilis - 7	87.5	15.7	—00.8	6.8	109.2
Julii - - 5	94.6	20.0	—11.4	6.1	109.3
Decemb. 13	65.7	26.5	+10.6	5.6	108.4
1729 Decemb. 3	53.4	41.1	9.7	4.1	108.3
1731 Januar. - 3	38.6	57.2	11.4	+1.8	109.0
1732 Januar. - 8	26.8	71.4	+11.4	—0.5	109.1
1734 Julii - 11	A 21.3	104.4	—11.4	5.7	108.6
1738 Decemb. 24	B 56.3	159.1	+11.2	5.1	108.9
1740 Januar. - 21	71.8	173.1	10.9	—2.6	109.6
1747 Februar. 27	182.5	277.6	6.6	+6.7	108.4

η Urſæ Majoris	Diſt. Auſt. a 39°. 15′	Var. Decl. ex Præceſ.	Aberratio Lucis	Var. Decl. ex Nutat.	Diſtantia media
	″	″	″	″	″
1727 Octob. 13	153.3	—11.1	+ 1.0	—4.0	139.2
1728 Januar. - 24	176.4	17.4	—17.6	3.3	137.6
Julii - 17	150.8	27.1	+17.8	3.5	138.0
Octob. - 11	170.6	31.2	+ 2.6	3.6	138.4
1729 Januar. - 16	196.6	37.2	—17.8	3.2	138.4
Julii - 21	170.4	47.4	+17.8	2.8	138.0
1730 Julii - 19	189.6	66.9	+17.8	1.7	138.8
Decemb. 28	232.4	75.3	—16.7	1.0	139.4
1731 Septemb. 18	218.1	88.4	+ 9.4	—0.4	138.7
1732 Januar. - 10	250.7	94.5	—17.7	+0.3	138.8
Aprilis 13	238.7	98.5	—00.8	0.4	139.8
1734 Julii - 11	255.7	137.8	+17.6	3.2	138.7
1735 Septemb. 10	280.8	156.5	+11.4	3.6	139.2
1736 Septemb. 8	294.7	172.6	11.6	3.8	137.5
1737 Julii - 3	303.0	186.0	17.2	3.9	138.0
1738 Junii - 29	319.0	202.0	16.8	3.3	137.0
1739 Aprilis 25	348.0	215.2	2.5	2.4	137.6
1740 Junii - 3	360.3	234.7	12.8	+1.2	139.6
1741 Septemb. 23	390.9	258.4	7.9	—0.8	139.6
1745 Septemb. 5	466.7	336.8	12.4	4.2	138.1
1746 Septemb. 20	492.0	358.8	8.8	4.1	138.7
1747 Septemb. 2	507.2	377.0	13.2	3.5	139.5

In hujuſmodi igitur factâ collatione ea ſanè elucet conſonantia, quâ majorem ſperari vix poſſe nemo non fatebitur; quod utique manifeſte arguit ab Ill. *Bradleio* et ſummâ cum ſolertiâ obſervationes fuiſſe inſtitutas et mirâ perſpicaciâ veram motuum obſervatorum detectam cauſam.

Sed et ne ſciri fortè deſideraretur quanta intercedat in duabus aliis hypotheſibus Obſervationes inter et Theoriam diſcrepantia, non abs re eſſe putavimus medias ſtellarum earumdem diſtantias, quales ex Nutatione æquali 18″ et 21″.1 proveniunt, in ſequentem tabulam congerere columnis ſextis tabularum præcedentium reſpondentem.

Stellarum

Stellarum diſtantiæ mediæ in hypotheſi Nutationis 18″						Stellarum diſtantiæ mediæ in hypotheſi Nutationis 21″.1					
γ Drac.	35ª. Camel.	α Caſſiop.	τ Perſei	α Perſei	η Urſæ M.	γ Drac.	35ª. Camel.	α Caſſiop.	τ Perſei	α Perſei	η Urſæ M.
″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″
79.8	76.8	68.3	71.0	108.6	139.7	78.5	78.3	68.5	72.0	110.0	138.7
79.8	76.7	68.8	71.1	108.6	137.8	78.6	78.3	69.3	72.4	110.0	137.3
79.5	77.9	68.4	69.8	108.7	138.4	78.4	79.1	69.0	71.2	110.1	137.5
79.4	77.3	66.3	69.9	107.7	139.1	78.4	78.4	67.0	71.3	109.2	137.9
79.7	76.7	67.8	70.3	107.6	138.9	78.9	77.7	68.5	71.4	109.0	137.8
80.0	77.5	65.8	70.6	108.6	138.5	79.6	78.1	66.6	71.4	109.5	137.5
80.0	76.3	66.1	71.1	108.8	139.3	80.1	76.6	66.7	71.4	109.4	138.2
80.5	78.1	67.5	71.4	108.7	139.9	81.0	77.5	68.0	70.2	108.4	138.8
78.9	76.3	68.5	72.9	109.6	139.2	79.7	75.5	68.8	71.5	108.3	138.2
79.7	76.7	67.0		110.2	139.6	81.0	75.6	67.3		109.0	138.3
80.2	77.7	67.7		107.9	140.4	81.8	77.2	67.0		109.1	139.3
79.0	79.1	70.3			138.5	80.8	80.3	69.7			138.6
79.2		68.8			139.1	80.8		69.3			139.5
78.0					137.0	79.4					137.8
79.6					140.2	80.5					138.6
80.1					136.4	80.5					137.7
80.8					137.1	80.8					138.2
78.3					138.9	77.9					140.1
80.0					139.2	79.0					140.1
80.9					138.4	79.4					137.8
80.0					139.2	79.8					138.2
80.3					140.1	79.2					139.0

Unde et id deprehenditur, loca ſtellarum in hac duplici hypotheſi determinata etiam a veris non ità multum abludere.

Supereſt ut habeatur Præceſſio Æquinoctiorum annua pro quolibet nodorum lunæ ſitu, quæ per Coroll. prop. 2. computata, exiſtente nutatione 19″. 27‴, exhibetur in tabula ſequente.

Annua Præceſſio Æquinoctiorum							
☽ ☊ ab ♈	Sig. O	I	II	III	IV	V	
°	″	″	″	″	″	″	
0	56.4	55.6	53.4	50.3	47.2	45.0	30
5	56.4	55.3	52.9	49.8	46.8	44.8	25
10	56.3	55.0	52.4	49.2	46.4	44.6	20
15	56.2	54.6	51.9	48.7	46.0	44.4	15
20	56.0	54.2	51.4	48.2	45.6	44.3	10
25	55.8	53.8	50.8	47.7	45.3	44.2	5
30	55.6	53.4	50.3	47.2	45.0	44.2	0
	Sig. XI	X	IX	VIII	VII	VI	☽ ☊ ab ♈

Scholium II.

Si nulla habeatur ratio æquationum, quas in Præceſſione Æquinoctiorum et Nutatione axis terræ generat vis ſolis, conſequitur ex prop. 2. et 4. motum Poli terreſtris ſatis accurate fieri in ellipſi, cujus axis major, qui jacet in plano Coluri Solſtitiorum, eſt æqualis 19″$\frac{1}{2}$ et axis minor 14$\frac{1}{2}$, atque angulum deſcribere circa centrum ellipſeos æqualem motui nodi lunaris.

Fortè arguet quis hypotheſim, quam de denſitate terræ uniformi, ſimulque de ejuſdem diametrorum ratione $\frac{178}{177}$ liberé uſurpavimus, cum utrumque unà conſiſtere non poſſit. Equidem, ſi ad rerum cognitionem

tionem ſummam attingere fas eſſet, Theoriam inde perfectam evadere non diffitemur. Sed, præterquam quòd quænam ſit accurata diametrorum ratio et conſtitutio interna globi terraquei hactenùs non conſtet, atque etiam tædio nimis eſſet omnes, qui poſſunt caſus diverſæ denſitatis excogitari, ſigillatim diſcutere; non ſequitur labefactari præcedentem theoriam, etiam ſi forte verum ſit terram non eſſe uniformiter denſam, neque proportionem diametrorum eſſe eam, quam adhibuimus. Nam, dato Æquinoctiorum motu medio à vi ſolis vel lunæ oruindo, patet ex propoſitionibus præcedentibus ritè inde determinari æquationes Præceſſionis et Nutationis, quippe quæ in quacumque denſitatis hypotheſi ſemper ſunt proportionales prædicto motui medio, et legem conſtantem ſervant. Unde, ſi vel Æquinoctiorum Præceſſionem vel axis terræ Nutationem ipſam, quæ reverâ eſt, aſſumpſimus, quantumvis ſimus de terræ configuratione hallucinati, vera omnia et firma conſiſtere videtur.

Scholium III.

Quanquam Poli Terreſtris evagationes, quâ potuimus perſpicuitate, ex ſuis cauſis deduximus ac demonſtravimus; theoriam tamen ipſam conſtructione geometricâ breviter illuſtrare non pigebit, cum unica ad eas, quæ a ſole pendent, altera ad illas, quæ à lunâ, exhibendas conſtructio ſufficiat.

In circulo *LRG* (Fig. 7.) cujus centrum *T*, ducantur radii duo *TL*, *TR*, ad ſe invicem normales, et in *TR* ſumpto puncto *V*, ità ut ſit *TV* ad *RV* ut motus ſolis medius ad motum medium æquinoctiorum vi ſolis genitum, centro *T* et ſemiaxibus *TL*, *TV* de-

 ſcribatur

cribatur ellipſis *LVG*; atque hoc pacto erit motus ſolis medius ad motum ſolis medium ab æquinoctio ut area ellipſeos ad aream circuli, *TR* ad *RV* ut tangens obliquitatis Eclipticæ mediocris ad tangentem variationis totius ejuſdem Obliquitatis. Et ſi exhibeat *T* terram, *L* punctum æquinoctiale, et in circulo ducatur radius quilibet *TS* ellipſim ſecans in *P*, erit motus æquinoctiorum ad motum ſolis medium, quo tempore ſol ab æquinoctio degreditur per arcum *LS*, ut ſpatium *SLP* ad ſectorem ellipticum *PTL*, et *RV* ad *SP* ut tangens variationis totius obliquitatis eclipticæ ad tangentem variationis tempore prædicto factæ, ſive ut ipſa variatio prior ad variationem poſteriorem quam proximè. Item ductâ ad circulum rectâ *PF* parallelâ rectæ *TR*, cum ſit angulus *STL* diſtantia ſolis vera ab æquinoctio, erit angulus *FTL* diſtantia ejuſdem media, atque adeò erit angulus *FTS* æquatio motûs æquinoctiorum, et ſinus hujus anguli, ubi maximus eſt inoctantibus æquinoctiorum, eſt ad radium ut *RV* ad *TR*+*TV*, ex naturâ ellipſeos; in aliis locis ejuſdem æquationis ſinus, vel etiam ipſa æquatio, eſt ut ſinus duplæ diſtantiæ ſolis ab æquinoctio vel ſolſtitio quam proximè. Ut hæc demonſtrentur, motus ſolis ponatur uniformis, et recta *TS* ferri intelligatur circa centrum *T* cum ſummâ velocitatum ſolis et æquinoctii, atque in datâ temporis particulâ deſcribat ſectorem *STs*: hoc pacto ſi recta *Ts* ſecet ellipſim in *p*, et ducatur *SH* perpendicularis in *TL*, ex naturâ hujus ellipſeos datur ſector *PTp*, et areola *SPps* eſt ut $\overline{SH}^2$, id eſt, ut quadratum ſinûs diſtantiæ ſolis ab æquinoctio, atque in eâdem ratione eſt etiam linea *SP* quam proximè. Conferantur hæc cum demon-
ſtratis

ſtratis in prop. 3. et in Coroll. 2. prop. 1, et patebit conſtructio. Hîc autem motum æquinoctiorum vi lunæ debitum negligo, quia parvi momenti eſt; ſin ejus habeatur ratio, pro motu medio ſolis ſubſtitui debet ſumma motûs medii ſolis et motûs medii æquinoctii vi lunæ geniti.

Jam inæqualitates eæ, quæ pendent à ſitu nodorum lunæ, ità ferè exhiberi poſſunt. Circuli *EAG* (Fig. 8.) radius *TE* dividatur in *C*, ità ut ſit *TE* ad *TC* ut motus nodi ab æquinoctio ad motum æquinoctii vi lunæ genitum, et ut radius ad ſinum inclinationis orbis lunaris ad Eclipticam conjunctim, atque centro *C*, foco *T*, et ſemiaxe majore $CB=TE$ deſcribatur ellipſis *BAD*. Tum ſi area tota circuli *EAGE* exponat revolutionem nodi ad idem æquinoctium, area *BAE* ſive *ADG* diminuta in ratione radii ad tangentem duplicatæ inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem exprimet æquationem nodorum maximam quamproximè, et recta *BE* æqualis erit ſinui æquationis maximæ Obliquitatis Eclipticæ ad radium *TE*. Inſuper ſi *T* denotet terram, *E* punctum æquinoctii verni, et ad locum nodi ducatur recta *TP* occurrens circulo in *N* et ellipſi in *P*, æquatio æquinoctiorum eo tempore ad erit æquationem maximam ut ſpatium *BPNE* ad ſpatium *BAE*, et æquatio Obliquitatis Eclipticæ ad æquationem maximam ut recta *PN* ad rectam *BE*. Ubi nodus ultra Solſtitium digreſſus pervenerit in *n*, ducto radio *Tn* ſecante el ipſim in *p*, æquatio æquinoctiorum eo in caſu proportionalis eſt differentiæ ſpatiorum *ABE*, *Anp*, atque æquatio Obliquitatis Eclipticæ proportionalis linea *np* ſit negativa. Cum enim perexigua ſit excentricitas *TC*, ex naturâ ellipſeos ſpatium *ABE* ſive *ADG*, producto ſcilicet axe majore *BD*

donec ſecet circulum in *G*, æquatur facto *TE*×*TC* quam proximè, et ductâ *NH* perpendiculari in *TE*, eſt ſpatium *BPNE* ut *NH* et recta *PN* ut *TH*. His igitur collatis cum iis quæ demonſtrata ſunt in prop. 2 et 4, palam fiet conſtructio.

Hîc monitum volo, quod initio fieri oportuit, per motum ſolis vel nodi medium, de quo toties eſt ſermo in propoſitionibus, intelligi debere motum ſolis vel nodi medium ab æquinoctio, id eſt, motum compoſitum ex motuum mediocrium vel ſummâ ſolis et æquinoctii, vel differentiâ nodi et æquinoctii. Quamvis enim motus ille æquinoctii tantillus ſit præ motu ſolis vel nodi, ut in computo æquationum præceſſionis æquinoctiorum vel nutationis axis terræ nullum ejus omiſſio inducat errorem ſenſibilem, hoc eò cavetur, ut accurata procedat propoſitionum demonſtratio.

Denique Orbitæ Lunaris ad Eclipticam inclinationem conſtantem ſupponere non dubitavi, licet variabilis ſit; ſiquidem, cum variatio illa ſit paucorum minutorum, atque adeò æquationem nonniſi perexiguam hîc generare valeat, hujuſmodi minutiis Theoriam implicare atque onerare nolui.

C. Walmeſley.

De

De Inæqualitatibus motuum Terræ.

QUIBUS in motu ſuo Tellus noſtra ob actionem Lunæ inæqualitatibus ſubjaceat, ab aliis jam feré expenſum habetur. Quæ veró perturbationes ex viribus planetarum reliquorum oriri poſſint, quia vix quidquam delibatum reperitur, ideò viſum fuit harum inveſtigationem juxta principia *Gravitatis Newtonianæ* inſtituere. Actiones quidem Mercurii, Veneris et Martis, ob horum corporum parvitatem et vires ignotas, prætermittimus; atque adeò ad ſolas Jovis et Saturni, præſertim Jovis planetarum omnium maximi, diſquiſitio noſtra reſtringitur. Plana autem orbium horum planetarum, licèt ob mutuas actiones non penitus immota, in ſequentibus tamen tanquam immota ſupponere fas erit, cum tantilla mutatio in motum terræ vix influere poſſit.

Propositio I. Problema.

Invenire vires Jovis et Saturni ad perturbandum motum Terræ.

Eſto Sol in *S*, (Fig. 1.) Jupiter in *I*, Terra in *T* revolvens in orbe *TOT*; jungantur *SI*, *IT*, *ST*, quarum *ST* ſecet orbitam Lunæ *HLH* in *L*. Tum ſimile adhibendo ratiocinium, quo à *Newtono* determinatur actio ſolis in lunam, ſi *SI* exhibeat gravitatem ſolis in Jovem, *ST* exhibebit vim quâ Jupiter deprimit terram verſus ſolem quamproximè; gravitas autem ſolis in Jovem eſt ad gravitatem Jovis in ſolem paribus diſtantiis, ex demonſtratis apud *Newtonum*

tonum, ut 1 ad 1067, et gravitas Jovis in ſolem eſt ad gravitatem terræ in ſolem ut $\overline{ST}^2$ ad $\overline{SI}^2$: tum eſt gravitas terræ in ſolem ad vim ſolis deprimentem lunam verſus terram ut ST ad TL. Conjungantur hæ rationes, et prodibit vis Jovis deprimens terram in ſolem ad vim ſolis deprimentem lunam in terram ut $\overline{ST}^4$ ad $\overline{SI}^3 \times TL \times 1067$ quamproximè, ſive, quia ſcribendo S et I pro temporibus periodicis terræ et jovis eſt $\overline{ST}^3$, ad $\overline{SI}^3 :: SS.\ II$, ut $SS \times ST$ ad $II \times TL \times 1067$; atque in hac ratione eſt vis Jovis ad perturbandum motum terræ ad vim ſolis quâ perturbatur motus lunæ. Datur autem vis poſterior, ergo et prior habebitur.

Quoniam eſt gravitas Saturni in ſolem ad gravitatem ſolis in Saturnum in æqualibus diſtantiis ut 3021 ad 1, loco numeri 1067 in præcedenti computo ſubſtituatur 3021 et loco revolutionis Jovis ea Saturni, atque habebitur ratio vis Saturni in terram ad vim ſolis in lunam. *Q. E. I.*

Coroll.

Quoniam errores lineares ex viribus diverſis oriundi ſunt ut vires ipſæ et quadrata temporum conjunctim, et errores angulares ut ipſi lineares applicati ad orbium radios, ſequitur errores angulares terræ annuos e ſole ſpectatos eſſe, ad errrores angulares lunæ lunæ menſtruos e terrâ ſpectatos in ratione compoſitâ, in ratione directâ virium Jovis in terram et ſolis in lunam ac duplicatâ temporum periodicorum terræ circa ſolem et lunæ circa terram conjunctim, et ex ratione inverſâ radiorum ST, TL, id eſt, ſi ſcribatur L pro tempore periodico lunæ, ex ſupra demon-

ſtratis,

ſtratis, ut S^4 ad $II \times LL \times 1067$ ſive ut 1 ad $\frac{II}{SS} \times \frac{LL}{SS} \times 1067$. Quamobrem hi errores in dato tempore, *v.g*, in certo annorum numero erunt ad ſe invicem ut 1 ad $\frac{II}{SS} \times \frac{L}{S} \times 1067$; hoc eſt, inæqualitates motûs terræ ſunt ad inæqualitates motûs lunæ in tempore dato in ratione compoſitâ, ex ratione duplicatâ temporis periodici terræ ad tempus periodicum Jovis, ex ratione ſimplici temporis periodici terræ circa ſolem ad tempus periodicum lunæ circa terram, et ex ratione gravitatis in Jovem ad gravitatem in ſolem, conjunctim. Exiſtentibus igitur temporibus periodicis, ovis Jdierum 4332,514; terræ 365,2565; lunæ 27,3215; erunt inæqualitates motûs terræ vi Jovis ad inæqulitates motûs lunæ in tempore dato in ratione 1 ad 11229,4.

Pro revolutione Jovis ponatur revolutio Saturni, dierum ſcilicet 10759,275; et pro 1067 adhibeatur numerus 3021, eruntque inæqualitates motûs terræ vi Saturni genitæ ad inæqualitates motûs lunæ in dato tempore ut 1 ad 196076,5. Et inde prodit vis ſaturni ad vim Jovis ad perturbandum motum terræ ut 1 ad 17,46.

Propositio II. Problema.

Determinare motus Nodorum et Apſidum Orbis Terreſtris.

Per motum nodorum orbis terreſtris intelligo motum lineæ interſectionis orbium terræ et Jovis vel Saturni factum in plano orbis Jovialis vel Saturnii. Motus nodorum lunæ in anno ſidereo juxta Aſtronomos eſt 19°. 20′. 32″, et hic motus ductus in 100 et dimi-

diminutus in ratione 1 ad 11229,4 per Coroll. prop. præced. fit 10′. 20″. 5‴, qui auctus in ratione coſinûs inclinationis orbis Jovialis ad Eclipticam ad coſinum inclinationis orbis lunaris, id eſt, in ratione coſinûs anguli 1°. 19′. 10″ ad coſinum anguli 5°. 8′½, evadit 10′. 22″. 26‴. Hic igitur eſt motus nodorum terræ regreſſivus in plano orbis Jovialis in annis centum ſideriis ex vi Jovis. Tum minuatur motus iſte 10′. 22″. 26‴ in ratione 1 ad 17,46, et prodibit motus nodorum, quem eodem tempore generat vis Saturni in plano ſui orbis ſive etiam in plano orbis, Jovialis proximè, æqualis 35″. 39‴. Motus igitur nodorum terræ totus ex viribus conjunctis in annis centum in plano orbis Jovialis eſt 10′. 58″ circiter in antecedentia.

Eadem prorſus ratione colligi poteſt motus Aphelii terræ: erit enim et hic motus, quatenus ex vi Jovis oritur, ad motum Apogæi lunæ in dato tempore ut 1 ad 11229.4; adeoque ſi apogæum lunæ conficiat annuatim 40°. 40′. 43″ in conſequentia, aphelium terræ conficiet annuatim 13″. 3‴. 28iv et in annis centum 21′.44″ etiam in conſequentia. Deinde imminutus hic motus in ratione 1 ad 17,46 fiet 1′. 14″½ quem generat vis Saturni; atque horum motuum ſumma ſive totus aphelii terræ motus progreſſivus in annis centum evadit 22′. 58″½, et motus annuus 13″. 47‴. Hoc autem congruit cum tabulis celebrioribus Aſtronomicis, quæ progreſſum Aphelii terræ annuum vulgò exhibent plus minus 1′. 3″, hoc eſt, ablato motu regreſſivo 50″ æquinoctiorum, 13″. *Q. E. I.*

COROLL. I.

Errores lineares planetarum Jove inferiorum erunt in ſingulis eorum revolutionibus proximè ut vires Jovis in eos exercitæ et quadrata temporum revolutionum conjunctim; et quia plana horum orbium à ſe invicem et à plano orbis Jovis parum divergunt, vis Jovis ad perturbandum ſingulorum motus eſt ut diſtantiæ cujuſque planetæ à ſole, unde eorum errores angulares erunt in ſingulis revolutionibus ut quadrata temporum periodicorum, ac proinde in tempore dato ut ipſa tempora periodica, ſive in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ipſorum à ſole. Quare poſito motu nodorum terræ in annis centum 10′. 22″$\frac{1}{2}$ ex vi Jovis in antecedentia, et 35″$\frac{1}{2}$ ex vi Saturni, uti ſupra definitum eſt; et exiſtente periodo Martis dierum 686,9785; Veneris 224,701; et Mercurii 87,9692; conſit tabella ſequens.

Mot. Nodor. in annis 100	Ex vi Jovis	Ex vi Saturni	Mot. totus regreſſivus
Martis - -	19′. 30″ -	1′. 7″ - -	20′. 37″
Veneris -	6. 23 -	0.22 - -	6. 45
Mercurii -	2. 29$\frac{1}{2}$ -	0.8$\frac{1}{2}$ - -	2. 38

Pariter ſi aphelium terræ in annis centum vi Jovis conficiat 21′. 44″ in conſequentia, et vi Saturni 1′. 14″$\frac{1}{2}$, habebuntur pro reliquis planetis

Mot. Aphel. in annis 100	Ex vi Jovis	Ex vi Saturni	Mot. totus progreſſivus
Martis -	40′. 52″$\frac{1}{2}$ -	2′. 20″$\frac{1}{2}$ -	43′. 13″
Veneris -	13. 22 - -	0. 46 - -	14. 8
Mercurii -	5. 14 - -	0. 18 - -	5. 32

Newtonus quidem in ſcholio ad prop. 14. lib. 3. Phil. Nat. hos Apheliorum motus minores ſtatuit, ſed ideò quod motum Aphelii Martis, ex quo cæteros derivat, aſſumpſerit, ceu ex Obſervationibus, æqualem $33'.20''$ in annis centum: verum ſuſpicor hunc Aphelii Martis motum per Obſervationes nondum accuraté compertum haberi. Quin et diſcrepantia tabularum Aſtronomicarum dubium injicit de velocitate Apheliorum et Nodorum Planetarum penè omnium non adhuc certò conſtare apud Aſtronomos. Sed hæc non ſunt hujus inſtituti.

Coroll. II.

Deſignet *IDd* (Fig. 2.) orbitam Jovis, *DE* eclipticam quæ poſt centum annos ſitum habeat *dE*, tranſlato nodo à *D* in *d*: ducto arcu *Dg* perpendiculari in *dE*, erit *Dd* ad *Dg* ut radius ad ſinum inclinationis orbis Jovialis ad eclipticam, hoc eſt, ut radius ad ſinum anguli $1°. 19'. 10''$; adeoque exiſtente $Dd = 10'.58''$, ut ſupra definitum eſt, erit $Dg = 15''.9'''$. Unde ſpatio annorum centum Ecliptica mutat latitudinem ſuam (ſi ita loqui fas eſt) quantitate $15''.9'''$, vel potius ſtella in communi ſectione Eclipticæ et orbitæ Jovis locata paulatim ab Eclipticâ recedere cernetur ità ut poſt centum annos ab eâ diſtabit angulo $15''. 9'''$, atque ità per multa ſecula ferè æqualiter augebitur hujus ſtellæ latitudo: quin et tantundem augebuntur vel minuentur latitudines ſtellarum omnium parem cum nodis Jovialibus longitudinem habentium. Hæ igitur fixæ à tempore Hipparchi, id eſt, per annos 1900 circiter, latitudinem ſuam mutarunt quinque penè minutis primis. Pariter cum

arcus

arcus omnes inter circulos DE, dE, comprehenſi ad circulum dE perpendiculares ſint ut ſinus diſtantiarum ipſorum à puncto E, ſive ut coſinus diſtantiarum ipſorum à nodo Jovis, incrementum decrementum latitudinis ſtellæ cujuſlibet erit ad 15″.9‴ ut coſinus differentiæ longitudinum ſtellæ ipſius et nodi proximi Jovis ad radium; ac proinde, datâ ſemel longitudine tum ſtellæ tum nodorum Jovis, dabitur variatio latitudinis ſtellæ pro tempore quolibet. Ex hoc principio computavimus variationem latitudinis ſiderum pro ſingulis quinque gradibus longitudinis, qualis exurgere debeat lapſu ſeculi proximè venturi ab anno 1750 incipientis ad annum 1850 abſolvendi; in hypotheſi quod nodus Jovis aſcendens anno 1800 occupabit nonum gradum Cancri, ſicuti in tabulis Aſtronomicis ferè habetur.

Variatio Secularis latitudinis ſtellarum in parte Eclipticæ Boreali exiſtentium												
Longitudo Stellar.	O adde	VI Subt.	II adde	VIII Subt.	IV adde	X Subt.	I adde	VII Subt.	III adde	IX Subt.	V adde	XI Subt.
o	″	‴	″	‴	″	‴	″	‴	″	‴	″	‴
9	0.	0	13.	8	13.	8	7.	35	15.	9	7.	35
14	1.	19	13.	44	12.	25	8.	41	15.	6	6.	24
19	2.	38	14.	14	11.	36	9.	44	14.	55	5.	12
24	3.	55	14.	38	10.	43	10.	43	14.	38	3.	55
29	5.	12	14.	55	9.	44	11.	36	14.	14	2.	38
Longitudo Stellar.	I adde	VII Subt.	III adde	IX Subt.	V adde	XI Subt.	II adde	VIII Subt.	IV adde	X Subt	O Subt.	VI adde
4	6.	24	15.	6	8.	41	12.	25	13.	44	1.	1
9	7.	35	15.	9	7.	35	13.	8	13.	8	0.	0
Pro ſtellis Auſtralibus mutanda ſunt ſigna additionis et ſubtractionis.												

Hîc locus eſſet conſenſum Theoriæ cum Phœnomenis oſtendere: ſed præterquam quòd id vetat inopia Obſervationum antiquorum ſatis accuraté habitarum; ineſſe ſtellis quibuſdam motum aliquem, quem diſcernere oporteret, magis notabilem advertit Ill. Bradleius, quemque à qualicumque mutatione in motu terreſtri non pendere exiſtimat. Itaque in Phœnomeni hujus elucidationem ulteriori ope ab Aſtronomis ſperandâ indigemus.

Propositio III. Problema.

Variationem Obliquitatis Eclipticæ ex viribus prædictis oriundam determinare.

Quando-

Quandoquidem ex propoſitione præcedente Ecliptica ſenſim mutat ſitum ſuum, inde generatim patet variari etiam debere inclinationem ejus ad Æquatorem: qualis autem et quanta ſit Variatio hæc ut inveſtigemus, ſit *VED* (Fig. 3.) Ecliptica, *JD* orbis Jovis ſecans eclipticam in *D*, *QL* Æquator, et *L* punctum Æquinoctiale. Sunto *DE* et *LV* quadrantes circuli, et ſi per temporis particulam intelligatur nodus *D* transferri motu ſuo medio in *d*, circulus *dEt* deſcriptus per puncta *d*, *E*, exhibebit ſitum eclipticæ elapſo illo tempore; et ſi in eumdem demittantur perpendicula *Dg*, *Vt*, poſterius *Vt* exhibebit variationem obliquitatis eclipticæ eodem tempore genitam. Scripto igitur *s* pro ſinu inclinationis orbis Jovis ad Eclipticam, exiſtente radio 1, erit in triangulo *Ddg*, $Dd:Dg::1:s$; ſed eſt $Dg:Vt::1:$ Sin. *EV*; unde erit $Dd:Vt::1:s\times$ Sin. *EV*; at ob $DE=LV$, eſt $DL=EV$, adeoque ſit $Dd:Vt::1:s\times$ Sin. *DL*, hincque patet variationem momentaneam obliquitatis Eclipticæ eſſe ut ſinus diſtantiæ nodi Jovis ab Æquinoctio.

Ducatur jam *LC* ad centrum ſphæræ *C*, et in *LC* perpendiculum *DK*; atque ob motum regreſſivum tum nodi *D* tum æquinoctii *L*, velociorem autem æquinoctii quam nodi, puncta *D*, *L*, ad ſe mutuò accedunt vel a ſe recedunt differentiâ velocitatum: fingamus igitur alterutrum *v.g.* nodum *D* moveri cum hac differentiâ velocitatum, ſtante æquinoctio *L* immoto, et eſto *De* arcus quam minimus hac velocitatum differentiâ deſcriptus, et in *LC* demiſſo perpendiculo *ek*, habetur $De:Kk::1:DK$ vel Sin *DL*, unde eſt $Dd:Vt::De:s\times Kk$, et ſumma variationum omnium *Vt*, quo tempore punctum *D* differentiâ prædictâ velocitatum deſcripſerit arcum

quem-

quemvis DH, erit ad ſummam totidem motuum nodi D, id eſt, variatio obliquitatis eclipticæ eo tempore genita erit ad motum nodi, ut ſumma omnium Kk ducta in ſinum s ad ſummam totidem arcuum De, hoc eſt, ducto in LC perpendiculo HM, ut factum $s \times KM$ ad arcum DH. Si denotaverit igitur N motum nodi Jovis, quo tempore deſcriptus fuerit arcus DH, variatio inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem eodem tempore genita erit $\frac{N \times KM \times s}{DH}$. Hincque cum $\frac{N}{DH}$ exprimat rationem motûs nodi ad differentiam motuum nodi et æquinoctii, et KM ſit differentia vel ſumma coſinuum diſtantiarum punctorum D et H ab æquinoctio, prout puncta K et M jaceant ad eaſdem vel diverſas partes centri C, naſcitur Theorema ſequens: *Eſt radius ad ſinum inclinationis orbitæ Jovis ad Eclipticam ut differentia vel ſumma coſinum diſtantiarum Nodi ab Æquinoctio in principio et fine temporis dati ad ſinum quendam*; deinde, *eſt differentia motuum Nodi et Æquinoctii ad modum nodi ut ſinus mox inventus ad ſinum Variationis Obliquitatis Eclipticæ.*

Pro nodo et inclinatione orbitæ Jovis ſubſtituantur nodus et inclinatio orbitæ Saturni, atque idem Theorema dabit variationem Obliquitatis Eclipticæ quam generat Saturnus. *Q. E. I.*

COROLL. I.

Nodus D in dictâ figurâ eſt nodus deſcendens Jovis, et L punctum Æquinoctii Verni; unde et ex ratiocinio problematis patet, quamdiu nodus D et æquinoctium L ad ſe accedunt, decreſcere inclinationem Eclipticæ ad Æquatorem; eamdem autem

9 creſcere,

creſcere, ubi prædicti nodus et æquinoctium recedunt à ſe invicem: vel, quod eodem recidit, in tranſitu nodi aſcendentis orbis Jovialis ab Æquinoctio Vernali ad Autumnale ſemper minuitur Obliquitas Eclipticæ, et in tranſitu ejuſdem nodi ab Æquinoctio Autumnali ad Vernale augetur.

Coroll. II.

Si puncta *D* et *H* fuerint ſita ex diverſis partibus puncti Æquinoctialis, id eſt, ſi nodus intra tempus propoſitum tranſierit per Æquinoctium, patet ex Coroll. præced. Obliquitatem Eclipticæ partim creviſſe partim decreviſſe: quo in caſu incrementi ac decrementi differentia dabitur per Theorema ſuperius; ſed et habebitur horum ſumma ſive variatio tota Obliquitatis eo tempore genita, ſi loco differentiæ vel ſummæ coſinuum diſtantiarum nodi ab æquinoctio ſubſtituatur in Theoremate prædicto ſumma ſinuum verſorum earumdem diſtantiarum, ut ſatis patet.

Ratiocinium utriuſque Corollarii obtinet etiam pro Saturno.

Scholium I.

Cum fuerit multum diſceptatum inter Aſtronomos et veteres et recentiores de variâ vel conſtanti Eclipticæ Obliquitate, et neminem noverim, qui Phænomenon hoc juxta leges gravitatis expenderit, hac propoſitione lubuit ejus inveſtigationem pertentare.

Porrò cum nodus aſcendens Jovis nunc temporis verſatur in ſigno Cancri, patet per Coroll. 1. propoſitionis hujus à multis ſeculis ſemper decreviſſe Obliquitatem Eclipticæ. Sed ut ſpecialius hoc exponatur:

tur: Motus ſecularis nodi Jovialis ex prop. 2. eſt 10′. 22″$\frac{1}{2}$, et motus æquinoctii, annuo exiſtente 50″, eodem tempore eſt 1°. 23′. 20″, adeoque differentia motuum nodi et æquinoctii eſt ad motum nodi ut 7,0331 ad 1; quare tempus tranſitûs nodi ab æquinoctio verno ad autumnale, quod conſtituit terminum imminutionis Obliquitatis Eclipticæ, erit annorum 14803, ſepoſitâ acceleratione modicâ vi Saturni debitâ: exiſtente igitur nunc nodo Jovis in 8°$\frac{1}{3}$ ♋, ab annis 8000 (ſi tanta ſupponatur Mundi ætas) decrevit Eclipticæ Obliquitas, ac per annos 6000 et amplius decreſcere debebit, nec niſi poſt periodum annorum 29606 priſtinum ſitum recuperabit. Tota verò imminutio, quam prædicto tempore in Obliquitate Eclipticæ generare poteſt vis Jovis, prodit per Theorema in propoſitione traditum 22′. 30″. Hæc igitur eſt variatio maxima.

Si deſideretur decrementum factum in Obliquitate Eclipticæ ſpatio annorum mille proximè elapſorum, ità facilè computabitur. Motus nodi Jovis ex prop. 2. in annis mille eſt 1°. 43′. 44″; præceſſio autem æquinoctiorum eodem tempore 13°. 53′. 20″, atque horum motuum differentia 12°. 9′. 36″; unde poſito loco nodi initio anni 1755 in 8°. 20′ Cancri juxta tabulas Aſtronomicas Cl. *Halleii*, diſtantiæ nodi ab æquinoctio initio et fine temporis dati fuerunt 93°. 49′. 36″, et 81°. 40′: indeque per Theorema præfatum prodit decrementum quæſitum ex vi Jovis 2′. 22″. 56‴. Simili modo motus nodi Saturnii ex prop. 2. in annis mille eſt 5′. 56″$\frac{1}{2}$; unde differentia inter motum nodi et motum æquinoctii eſt ad motum nodi ut 139,265 ad 1: diſtantiæ autem nodi ab æquinoctio initio et fine temporis dati, poſito nodo

juxta

juxta eaſdem tabulas in 21°. 21′. 36″ Cancri initio anni 1755, hac ratione forent 68°. 38′. 24″ et 82°. 25′. 48″; hincque, exiſtente inclinatione orbis Saturni ad Eclipticam 2°. 30′. 10″, per idem theorema decrementum vi Saturniâ genitum exurgit 15″. 2‴. Adeòque decrementum totum Obliquitatis Eclipticæ annis mille proximé elapſis factum ex viribus conjunctis Jovis et Saturni evadit 2′. 38″. A tempore igitur *Hipparchi* imminuta eſt Obliquitas Eclipticæ minutis circiter quincque primis.

Haud ſecùs, ſi nodus Jovis aſcendens initio anni 1750 conſtituatur in 8°. 15′. 50″ ♋, et nodus Saturni in 21°. 20′. 6″ ♋, prout exhibent tabulæ *Halleianæ*, computatur tabella ſequens

Ab anno ineunte	Ad annum ineuntem.	Decrem. Obliq. Ecl. vi Jovis	Decrem. Obliq. Ecl. vi Saturn.	Totum Decrem. Obliq. Eclipt.
1750	1800	- 7″. 6‴	- - 0″. 44‴	- - 7″. 50‴
1800	1900	14. 9	- - 1. 27	- - 15. 36
1900	2000	14. 5	- - 1. 26	- - 15. 31

Collatio Theoriæ cum Phænomenis.

Ut adæquata theoriæ cum phœnomenis collatio inſtitueretur, Obſervationes Veterum conſulendæ forent et cum Nuperis comparandæ; ſed illæ imperfectiores ſunt quam quæ in minutis hujuſmodi quantitatibus definiendis inſerviant. Recentiorum itaque unam et alteram, minùs adeò idoneas, afferre ſufficiat.

1°. Refert Cl. *Le Monnier* in Actis Acad. Paris, an. 1738 altitudinem centri ſolis in ſolſtitio æſtivo verſantis anno 1669 à *Picarto* Pariſiis menſuratam fuiſſe 64°. 39′. 0″, et anno 1670 64°. 38′. 58.″: mediam ſumamus 64°. 38′. 59″. Ipſemet *Le Mon-*

nier ſolis limbi ſuperioris altitudinem (uti habetur in actis ejuſdem Acad. an 1743) in ſolſtitio æſtivo anni 1743 reperit 64°. 54′. 35″, adeoque altitudinem centri ſolis 64°. 38′. 45″. Locus autem nodi aſcendentis lunæ medio *Picarti* Obſervationum tempori reſpondens erat 27°. ♈ circiter, et 16°. ♉ tempore ſolſtitii æſtivi anni 1743: unde in priori caſu Nutatio axis Terreſtris erat 8″, totâ exiſtente 18″, et in poſteriori 6″. 15‴; atque his quantitatibus reſpectivé ablatis, altitudo ſolis prior evadit 64°. 38′. 51″, poſterior 64°. 38′. 38″. 45‴, quarum differentia 12″. 15‴ eſt decrementum factum in obliquitate mediocri Eclipticæ intervallo annorum 73½. Per propoſitionem noſtram decrementum vi Jovis genitum pro eodem temporis intervallo eſt 10″. 27‴, et vi Saturni 1″. 5‴: Totum igitur decrementum Obliquitatis Eclipticæ juxta theoriam fit 11″. 32‴.

2°. Ex Obſervationibus *Waltheri* ſolertiſſimé inter ſe comparatis colligit acutiſſimus Aſtronomus *De La Caille* (in Actis Acad. Pariſ. an. 1749) inclinationem Eclipticæ ad Æquatorem circa annum 1496 fuiſſe 23°. 29′. 32″, quæ nunc temporis æſtimatur 23°. 28′ 30″, adeòque annis 260 decrevit Obliquitas Eclipticæ minuto uno primo circiter. Per Theoriam noſtram decrementum illud vi Jovis foret 37″. 2‴, et vi Saturni 3″. 50‴; unde decrementum totum tempore prædicto evaderet 40″. 52‴ ſive 41″ circiter. Si loco tabulæ refractionum *Caſſinianæ Newtoniana* uſurparetur, Obliquitas Eclipticæ ex Obſervationibus *Waltheri* deducta minor evaderet minutis aliquot ſecundis, adeòque ad determinationem noſtram propius accederet. Cæterum propter incertitudinem refractiorum et latitudinum locorum, ex Obſervationibus in Sol-

ſtitiis

ſtitiis Æſtivalibus eodem loco habitis Variatio Obliquitatis Eclipticæ tutiſſimè definiri videtur.

Si variatio ex Obſervationibus tandem accuratè derivata ſuperaverit, uti in exemplis allatis, variationem, quam aſſignat hæc theoria, exceſſus ille debitus erit actionibus planetarum Martis et Veneris, quæ quidem, cum amborum nodi aſcendentes intra prima ſex ſigna verſentur, ad imminuendam Obliquitatem Eclipticæ etiam conſpirant. Quapropter, ſiquando Obſervationibus accuratè poterit innoteſcere tam hæc variatio quam progreſſus Aphelii terræ, planetarum item Martis ac Veneris tum demum et vires cognoſcere et moles ponderare licebit.

Propositio IV. Problema.

Motum Æquinoctiorum cauſis prædictis debitum determinare.

Hîc non inveſtigatur motus puncti Æquinoctialis, quatenus Æquator terræ ob materiam ibi redundantem vi Jovis et Saturni mutaret ſitum ſuum reſpectu Eclipticæ, quemadmodum viribus Solis et Lunæ fieri innoteſcit; hujuſmodi enim mutatio ex actionibus Jovis vel Saturni oriunda omninò debet eſſe inſenſibilis: ſed motum illum Æquinoctii quærimus, qui oritur ex variatione, quam fieri in ſitu plani Eclipticæ ſuprà monſtravimus.

Iiſdem igitur manentibus ac in propoſitione præcedente, ex puncto m ubi Æquator ſecat circulum dE demittatur in DE perpendiculum $\underline{mn}$, et quia eſt $Dg\underline{mn}::1:$ Coſ. DL ſive CK, et $Dd:Dg::1:s$,

 erit

erit $Dd : mn :: 1 : s \times CK$, vel ducto radio CS perpendiculari ad CL, et ad CS rectis perpendicularibus DR, er, HG, erit $Dd : mn :: De : s \times Rr$; adeoque erit ſumma omnium mn, quo tempore differentiâ motuum Æquinoctii et Nodi deſcribitur arcus DH, ad ſummam totidem Dd ut ſumma omnium Rr ducta in s ad ſummam totidem arcuum De, hoc eſt, ut factum $s \times RG$ ad arcum DH. Igitur ſumma omnium mn, id eſt, Latitudo puncti Æquinoctialis, ut ità dicam, ſive diſtantia ejus à plano DCE ſpectato ut immoto, eſt æqualis $\frac{N \times RG \times s}{DH}$, exhibente ſcilicet N motum nodi, quo tempore deſcribitur arcus DH. Unde, cum RG æquetur differentiæ vel ſummæ ſinuum arcuum DL, HL, prout puncta R, G, jaceant ad eaſdem vel diverſas partes centri C, circulo ID exhibente orbitam vel Jovis vel Saturni, conſit Theorema ſequens: *Eſt radius ad ſinum inclinationis orbitæ Jovis vel Saturni ad Eclipticam, ut differentia vel ſumma ſinuum diſtantiarum nodi ab Æquinoctio in principio et fine temporis dati ad ſinum quemdam:* deinde, *eſt differentia motuum Nodi et Æquinoctii ad motum nodi ut ſinus mox inventus ad ſinum variationis Latitudinis puncti Æquinoctialis.* Vel etiam quia variatio Obliquitatis Eclipticæ eſt ex propoſitione præcedente æqualis $\frac{N \times KM \times s}{DH}$, et variatio Latitudinis puncti Æquinoctialis æqualis $\frac{N \times RG \times s}{DH}$, habetur illud alterum Theorema: *Eſt variatio Latitudinis puncti æquinoctialis ad variationem Obliquitatis Eclipticæ ut ſumma vel differentia ſinuum diſtantiarum nodi ab æquinoctio initio et fine temporis dati*

ad

ad ſummam vel differentiam coſinuum earundem diſtantiarum.

Tum, quia eſt ſemper Ln ad mn ut coſinus inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem ad ejuſdem inclinationis ſinum, ſive ut radius ad tangentem ejuſdem inclinationis, erit ſumma omnium Ln tempore dato, hoc eſt, variatio puncti Æquinoctialis ſecundum Longitudinem a puncto fixo in plano DCE menſuratam ad ejuſdem variationem ſecundum Latitudinem in eâdem ratione, ideoque datur. *Q. E. I.*

Coroll.

Hinc ſequitur variationem puncti Æquinoctii Verni ſecundum latitudinem à plano immoto computatam ſemper fieri Boream verſus in tranſitu nodi aſcendentis Jovialis vel Saturnii à Solſtitio Æſtivo ad Hybernum, et Auſtrum verſus ubi idem nodus tranſit a Solſtitio Hyberno ad Æſtivum. Contrarium dici debet de puncto Æquinoctii Autumnalis: variationem autem puncti Æquinoctialis ſecundum longitudinem à loco dato in plano illo immoto numeratam fieri in priori caſu contra, in poſteriori ſecundum ſeriem ſignorum; hoc eſt, in priori caſu regreditur Æquinoctium, in poſteriori progreditur.

Si puncta D et H ſita fuerint ex diverſis partibus puncti Solſtitialis, id eſt, ſi per tempus propoſitum Nodus tranſierit in ſignum Cancri vel Capricorni, Theoremata in propoſitione tradita dabunt differentiam variationum contrarium puncti æquinoctialis; ſed et ſumma ipſarum quo pacto haberi poſſit facilè patet.

Scholium

SCHOLIUM.

Quum in decurſu annorum mille proximè elapſorum nodus Jovis aſcendens ſubierit ſignum Cancri, ac propterea Variationes præfatæ non in eundem toto eo tempore factæ fuerint ſenſum, quæramus quales evaſerint per annos quingentos ab initio anni 1755 retrorſum numeratos: quo in caſu differentia motuum nodi Jovialis et æquinoctii, per ſcholium prop. præcæd extitit 6°. 4′. 48″; unde cætera, ut ibi, proſequendo prodit per utrumvis theorema in propoſitione hac traditum Variatio puncti æquinoctii Verni ſecundum latitudinem Boream verſus æqualis 6″. 37‴, hincque variatio ſecundum longitudinem æqualis 15″. 14‴, vi Jovis.

Addantur in priori caſu pro vi Saturni 2″. 26‴, et in poſteriori 5″. 36‴, atque evadet tota variatio puncti æquinoctialis ſecundum latitudinem annis quingentis proximè elapſis facta æqualis 9″. 3‴, et Retrogreſſio ejudem puncti 20″. 50‴. Hujuſmodi igitur Variationes nonniſi perlongo tem poris intervallo ſenſibiles fiunt.

PROPOSITIO V. PROBLEMA.

Errorum Terreſtrium æquationes inveſtigare.

Errorum angularium Æquationes maximæ, cum et ipſæ ſint errores angulares, ſunt directè ut vires et quadrata temporum, quibus generantur, conjunctim, et inversè ut orbium diametri; ideòque ſunt ut ipſi errores ſive motus, quorum ſunt æquationes, temporibus iſtis geniti: tempora autem ipſa ſunt quamproximè ut æquationum periodi. Unde ob datos motuum lunarium et terreſtrium errores, æquatio-

numque

numque periodos, ex datis errorum lunarium æquationibus per analogiam eruentur æquationes errorum terreſtrium.

Sic, periodus æquationis Apogæi lunaris et Variationis Æquationis centri lunæ cum ſit proportionalis revolutioni ſolis ad Apogæum lunæ, ac propterea ob ſimilitudinem virium ſimiliter applicatarum periodus æquationis Aphelii terræ et Variationis æquationis centri proportionalis eſſe debeat revolutioni Jovis ad terræ Aphelium, erunt æquationes iſtæ lunares ad æquationes haſce terræ ſimiles, ut motus Apogæi lunaris tempore revolutionis ſolis ad lunæ apogæum, ad motum Aphelii terræ tempore revolutionis Jovis ad ipſum terræ Aphelium, hoc eſt, exiſtente motu medio Apogæi lunaris annuo 40°. 40′. 43″ et motu annuo Aphelii terræ ſupra invento 13″. 2‴. 28^{iv}, ut 45°. 51′. 40″ ad 2′. 34″. 42‴. Quarè poſitâ variatione totâ æquationis maximæ centri lunæ æquali 2°. 41′$\frac{1}{2}$ prout feré habetur in tabulis Aſtronomicis, erit variatio æquationis maximæ centri Terræ ſive Solis 9″. 4‴.

Denotet igitur *Æ* æquationem centri ſolis maximam mediocrem, eritque *Æ*+4″. 32‴ æquatio maxima, et *Æ*—4″. 32‴ æquatio minima; atque his æquationibus dabuntur etiam excentricitates congruæ.

Tum, quemadmodum variatio æquationis maximæ centri lunæ creſcit in ratione duplicatâ ſinûs diſtantiæ Apogæi lunaris à quadraturis ſuis cum ſole, ità variatio æquationis maximæ centri ſolis, id eſt, incrementum æquationis minimæ augetur in ratione duplicatâ ſinus diſtantiæ aphelii terræ a quadraturis ſuis cum Jove: ſive, variatio æquationis mediæ eſt ad ſe-

miſſem

miſſem variationis totius, nempe ad 4″. 32‴, ut coſinus duplæ diſtantiæ Jovis ab Aphelio terræ ad radium; et additur æquationi mediæ, ubi linea Apſidum Orbis magni pergit ab octantibus ſuis cum Jove ad ſyzgyias, vel a ſyzygiis ad octantes; in reliquâ parte ſubducitur. Utrum autem tantilla variatio Obſervationibus patere poſſit, Aſtronomis definiendum relinquo.

Haud ſecùs, ſi æquatio maxima apogæi lunæ ſtatuatur 12°. 18′ erit 45°. 51′. 40″ ad 2′. 34″. 42‴ ut 12°. 18′ ad æquationem maximam motûs Aphelii terræ ſive Apogæi ſolis, quæ proinde erit 41″, 30‴, ubi ſcilicet Apſides Orbis Telluris verſantur in octantibus ſuis cum Jove. In aliis poſitionibus æquatio Aphelii erit ad æquationem maximam ut ſinus duplæ diſtantiæ Jovis ab aphelio terræ ad radium; motui verò medio additur in tranſitu apſidum orbis magni a ſyzygiis ſuis cum Jove ad quadraturas, et in tranſitu a quadraturis ad ſyzygias ſubducitur, ac proinde in caſu quolibet habebitur verus Aphelii terræ ſive Apogæi ſolis locus.

Hoc pacto confecimus tabulam ſequentem, ſi forte uſui eſſe poſſit, in quâ *Æ* denotat æquationem centri ſolis maximam mediocrem.

Diſtantia

Diſtantia Jovis ab Apogæo Solis							
	0^s	VI	I	VII	II	VIII	
Gr.	Æquatio Apog.Sol. Adde	Æquatio Centri Solis	Æquatio Apog.Sol. Adde	Æquatio Centri Solis	Æquatio Apog.Sol. Adde	Æquatio Centri Solis	Gr
	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	″ ‴	
0	0. 0	Æ+4. 32	35. 56	Æ+2 16	35. 56	Æ—2. 16	30
10	14. 11	Æ+4. 16	40. 52	Æ+0. 47	26. 40	Æ—3. 29	20
20	26. 40	Æ+3. 29	40. 52	Æ—0. 47	14. 11	Æ—4. 16	10
30	35. 56	Æ+2. 16	35. 56	Æ—2. 16	0. 0	Æ—4. 32	0
	Subtrahe		Subtrahe		Subtrahe		
	V	XI	IV	X	III	IX	

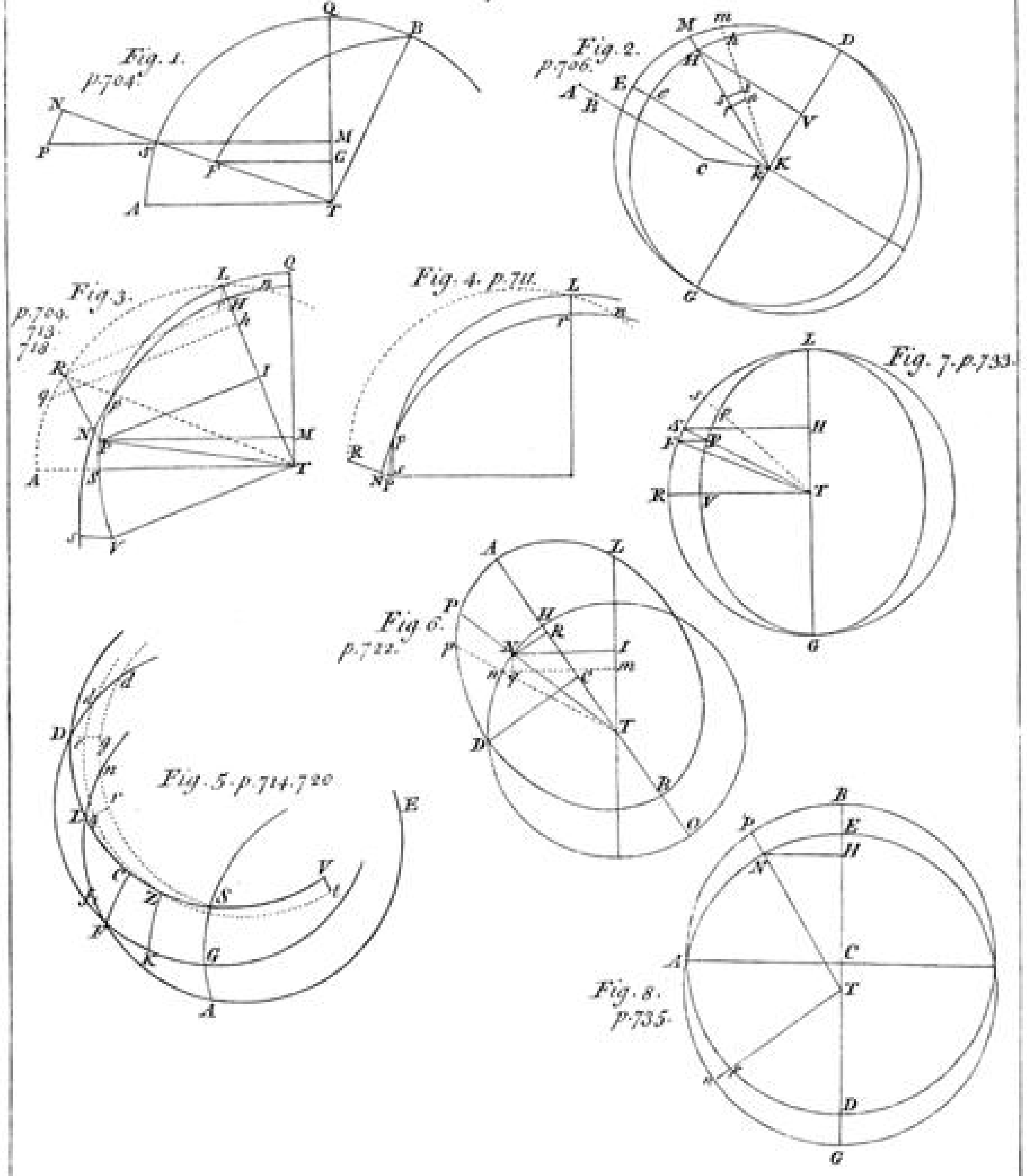
Simili modo erit Variatio lunæ Variationem ſolis ut motus medius Apogæi lunaris tempore revolutionis lunæ ad ſolem ad motum medium Apogæi ſolaris tempore revolutionis ſolis ad Jovem; ideoque cum motus apogæi lunaris tempore ſynodico ſit 3°. 17′. 20″, et motus apogæi ſolaris ſit 14″. 15‴ quo tempore ſol ad Jovem revolvitur, poſitâ variatione maximâ lunæ 35′. 10″, prodit variatio maxima ſolis 2″. 32‴, quæ locum obtinet, ubi ſol verſatur in octantibus cum Jove; in aliis locis variatio foret ad variationem maximam ut ſinus duplæ diſtantiæ ſolis à quadraturis ſuis vel ſyzygiis cum Jove ad radium quam proximè.

Item, ſi eadem eſſet excentricitas orbium Terræ ac Jovis, foret æquatio motûs medii Terræ ſive ſolis, quæ oritur ex variâ contractione et dilatatione orbis magni per vim Jovis, ad ſimilem æquationem lunæ, ut motus apogæi ſolis tempore revolutionis Jovis ad motum apogæi lunæ tempore revolutionis ſolis, hoc eſt, ut 2′. 34″. 41‴ ad 40°. 40′. 43″; ſed hæc Æquatio ſolis augeri debet in ratione excentricitatis orbis Jovis ad

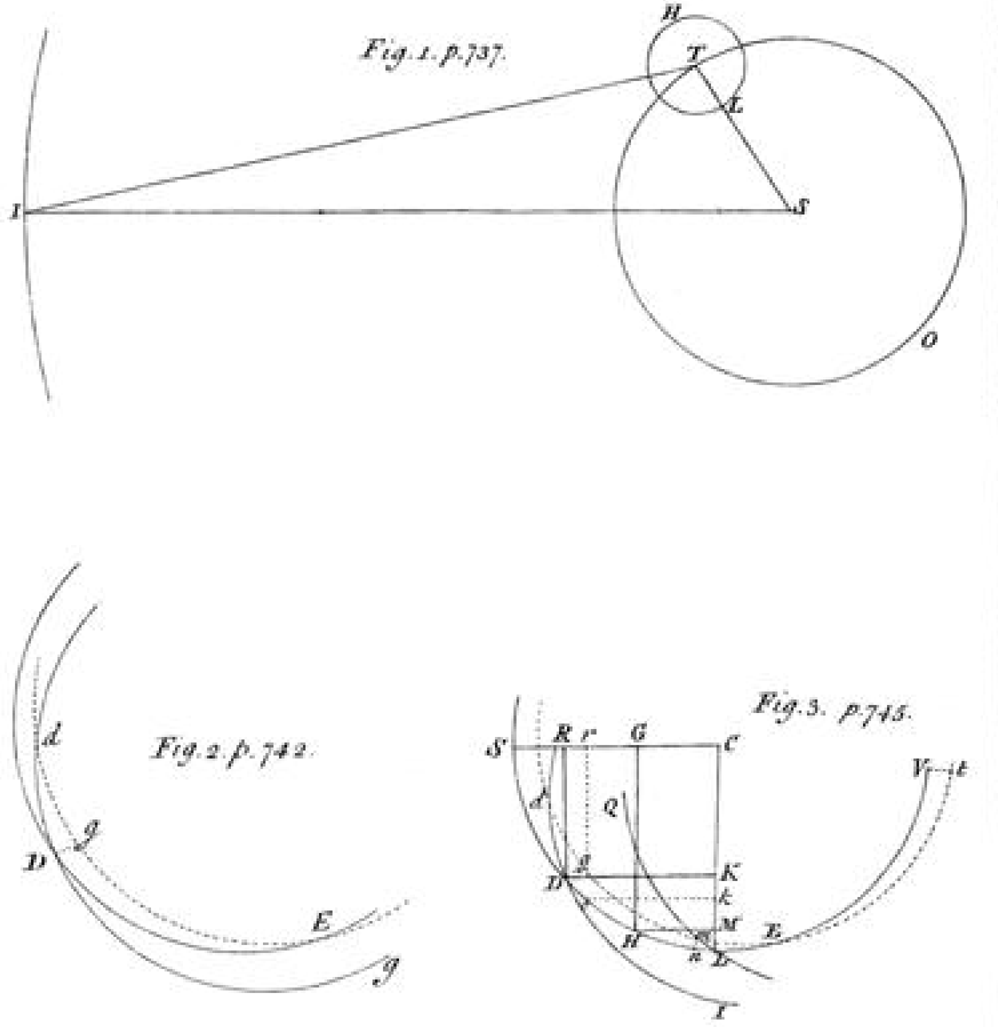
excentricitatem orbis terræ, ſive in ratione æquationis maximæ centri Jovis ad æquationem maximam centri Solis quamproximè, hoc eſt, in ratione 5°. 31'. 36'' ad 1° 66'. 20: unde ſi æquatio maxima medii motûs lunæ fuerit 11'. 50'', erit æquatio maxima medii motus ſolis 2''. 8''', in mediocribus ſcilicet Jovis a ſole diſtantiis; in aliis locis æquationi centri Jovis proportionalis eſt. In his omnibus vim Saturni utpote inſenſibilem negligo.

Atque eâdem methodo ad alias Solis æquationes æquationibus lunaribus analogas procedere liceret, niſi in hujuſmodi minutis exquirendis jam nimius eſſem: cum quæ in hac propoſitione recenſentur, tametſi præ cæteris notabiles, Obſervationum Aſtronomicarum ſolertiam omnem fortaſſe fugere debeant: cæterum tales re ipſa eſſe ſcire juvat; et plures fruſtrà commemorarem. *Q. E. I.*

Eſsay I.



Eſsay II.



J. Mynde sc.